Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul.
On note $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à $2n$. Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on note $e_k = X^k$ et $\mathscr{B} = (e_0, ..., e_{2n})$ la base canonique de E.
Pour tout couple de polynômes (P, Q) de E^2, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t$ et on rappelle que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
Soit L l'application définie sur E par :

$$\forall\, P \in E,\ \ L(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que L est une forme linéaire sur E.

2. Déterminer $L(e_k)$ pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$.

3. Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(L)$.

4. Prouver qu'il existe une base $\mathscr{U}$, que l'on ne cherchera pas à expliciter, de $\mathrm{Ker}(L)$, dont le premier vecteur est e_1.

5. Montrer que :
i) $\mathrm{Vect}(e_0)$ et $\mathrm{Ker}(L)$ sont deux sous-espaces orthogonaux,
ii) $E = \mathrm{Vect}(e_0) \oplus \mathrm{Ker}(L)$.

6. Soit λ un réel. On considère l'application T_λ définie sur E par :

$$\forall\, P \in E,\ \ T_\lambda(P) = P + \lambda\, L(P)\, X.$$

6.1. Vérifier que T_λ est un endomorphisme de E.

6.2. Soit $P \in E$. Calculer $(L \circ T_\lambda)\,(P)$.

6.3. Déterminer la matrice de T_λ dans une base de E adaptée à la décomposition obtenue aux questions **4.** et **5.**

6.4. Déterminer les valeurs propres de T_λ.

6.5. L'endomorphisme T_λ est-il diagonalisable ?

6.6. Justifier que T_λ est un automorphisme de E.

6.7. Pour tous réels α et β, préciser $T_\alpha \circ T_\beta$.

6.8. Déterminer T_λ^{-1}.

EXERCICE 2

On considère une variable aléatoire X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Questions de cours

1.1. Rappeler sans démonstration la loi de X, son espérance et sa variance.

1.2. Écrire les développements en séries entières des fonctions **sh** et **ch** ainsi que leurs domaines de validité.

1.3. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes sur Ω.
Rappeler la définition de « X_1 et X_2 sont indépendantes ».

2. Soit Y une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X et définie par :

$$Y = 0 \text{ si } X \text{ est paire et } Y = 1 \text{ si } X \text{ est impaire.}$$

2.1. Exprimer les événements $\{Y = 0\}$ et $\{Y = 1\}$ à l'aide d'événements $\{X = j\}$ où $j \in \mathbb{N}$.

2.2. En déduire la loi de Y et son espérance.
On donnera les résultats en utilisant les fonctions **exp**, **sh**, et **ch**.

3. Soit Z une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X, indépendante de X et telle que :

$$Z(\Omega) = \{1, 2\}, \text{ avec } \mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = 2) = \frac{1}{2}.$$

On pose $T = XZ$.

3.1. Préciser $T(\Omega)$.

3.2. Soit k un entier naturel.
En utilisant le système complet d'événements $(\{Z = 1\}, \{Z = 2\})$, exprimer la probabilité $\mathbb{P}(T = k)$ à l'aide de probabilités d'événements $\{X = j\}$ et $\{2X = j\}$ où $j \in \mathbb{N}$.

3.3. Déterminer la loi de T.

3.4. Quelle est la probabilité que T prenne des valeurs paires ?
On donnera le résultat en utilisant les fonctions **exp**, **sh**, et **ch**.

EXERCICE 3

Question de cours

1. Soit x un réel positif. Comparer x et x^2.

*****

Soit $\alpha \in]0, 1[$.
On se propose d'étudier la série de terme général $a_n = \dfrac{\sin(n^\alpha)}{n}$, $n \geqslant 1$.

2. On pose pour tout $t \geqslant 1$, $\varphi(t) = \dfrac{\sin(t^\alpha)}{t}$.

2.1. Justifier que la fonction $t \mapsto \sin(t^\alpha)$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.

2.2. Justifier que φ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et déterminer φ'.

2.3. Montrer que l'on a : $\forall t \in [1, +\infty[, \ |\varphi'(t)| \leqslant \dfrac{1 + \alpha\, t^\alpha}{t^2}$.

2.4. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\forall t \in [n, n+1],\ |\varphi(t) - \varphi(n)| \leqslant \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right)|t - n|.$$

3. On pose, pour tout $n \geqslant 1$: $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

Prouver que l'on a : $\forall\, n \geqslant 1,\ |u_n - a_n| \leqslant \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$.

4. Convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

4.1. Démontrer que $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

4.2. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

5. Démontrer, à l'aide d'un changement de variable, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

6. En déduire que la série de terme général u_n converge.

7. Prouver que la série de terme général $u_n - a_n$ converge absolument.

8. Déduire des questions précédentes que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} a_n$ converge.

9. *On suppose* que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} |a_n|$ est convergente.

9.1. Montrer qu'alors la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$ est convergente.

On pourra utiliser la question de cours.

9.2. Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.

On procédera comme à la question **4.2**.

9.3. On admet alors, en procédant comme précédemment, que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{\cos(2\,n^\alpha)}{n}$ est convergente.

Conclure sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} a_n$.

On pourra utiliser la formule de duplication : $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$.

EXERCICE 4

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Soient P et Q deux éléments de E.

On note : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} b_k X^k$, où $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.

Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} 2^{-n}\, P(n)\, Q(n)$ est absolument convergente.

2. On pose pour tous P et Q dans E : $(P|Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} P(n)\, Q(n)$.

2.1. Montrer que : $(S|S) = 0 \iff S$ est le polynôme nul.

2.2. Démontrer alors que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

3. Quelques calculs de sommes

3.1. Rappeler l'ensemble de définition de la fonction $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ et sa somme.

3.2. Justifier que la série $\sum_{n \geqslant 0} \mathrm{e}^{-nx}$ converge pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

3.3. Exprimer $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}$ à l'aide de la fonction f et en déduire que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.4. Soit $x > 0$. Exprimer à l'aide des fonctions usuelles, $g(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$.

3.5. Soit α un entier naturel, on pose $S_\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} n^\alpha\, 2^{-n}$.

Calculer S_0, S_1 et S_2.

On pourra utiliser les questions précédentes avec une valeur de x bien choisie.

On admettra que $S_3 = 26$ et $S_4 = 150$.

4. On cherche à calculer la distance du vecteur X^2 au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ dans E muni du produit scalaire défini dans la question **2**.

4.1. Déterminer les réels a et b tels que $X^2 - aX - b$ soit orthogonal à 1 et à X.

4.2. Prouver que l'ensemble $\left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}(n^2 - cn - d)^2,\ (c, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ possède un minimum.

4.3. En déduire la distance recherchée.

FIN DU SUJET

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

EXERCICE 1

5. Déjà, $\mathrm{Im}(L) \subset \mathbb{R}$. De plus, L est linéaire par linéarité de l'intégrale. Donc L est bien une forme linéaire sur E.

6. Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$.

$$\begin{aligned}L(e_k) &= \int_{-1}^{1} t^k \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{k+1}(1-(-1)^{k+1})\end{aligned}$$

donc $L(e_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ \dfrac{2}{k+1} & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$

7. Comme $L(e_0) \neq 0$, L est une forme linéaire non nulle. Donc $\mathrm{Ker}(L)$ est un hyperplan de E qui est de dimension $2n+1$. Donc $\dim(\mathrm{Ker}(L)) = 2n$.

8. D'une part, le vecteur e_1 est bien dans $\mathrm{Ker}(L)$ car 1 est impair. De plus, e_1 est un vecteur non nul, donc forme une famille libre de $\mathrm{Ker}(L)$ qui est de dimension finie. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille (e_1) en une base $\mathscr{U}$ de $\mathrm{Ker}(L)$.

9. i) Soit $P \in \mathrm{Ker}(L)$:

$$(e_0|P) = \int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t = L(P) = 0$$

donc $\mathrm{Vect}(e_0)$ et $\mathrm{Ker}(L)$ sont orthogonaux.

ii) Comme ces deux sous-espaces sont orthogonaux, ils sont en somme directe. Or, $\dim(\mathrm{Vect}(e_0)) + \dim(\mathrm{Ker}(L)) = 1 + 2n = \dim(E)$, donc $E = \mathrm{Vect}(e_0) \oplus \mathrm{Ker}(L)$.

10. Soit λ un réel. On considère l'application T_λ définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad T_\lambda(P) = P + \lambda\, L(P)\, X$$

10.1. Soient $P, Q \in E$ et $\mu \in \mathbb{R}$:

$$T_\lambda(\mu P + Q) = (\mu P + Q) + \lambda\, L(\mu P + Q)\, X = \mu(P + \lambda\, L(P)\, X) + Q + \lambda\, L(Q)\, X$$

par linéarité de L. Donc T_λ est linéaire.
Puis, pour tout $P \in E$, $\deg(T_\lambda(P)) \leqslant \max(\deg(P), 1) \leqslant 2n$, car $n \neq 0$. Donc T_λ est bien un endomorphisme de E.

10.2. Soit $P \in E$.

$$(L \circ T_\lambda)(P) = L(P + \lambda\, L(P)\, X) = L(P)(1 + \lambda\, L(X)) = L(P).$$

car $X \in \mathrm{Ker}(L)$.

10.3. Notons M la matrice de taille $2n+1$ demandée :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2\lambda & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10.4. La matrice M étant triangulaire inférieure, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Donc la seule valeur propre de T_λ est 1.

10.5. Si T_λ était diagonalisable, M serait semblable à l'identité. Or, la seule matrice semblable à l'identité est elle-même. Donc T_λ est diagonalisable si et seulement si $\lambda = 0$.

10.6. La matrice M est de déterminant 1 donc inversible, donc T_λ est un automorphisme de E.

10.7. Soit α et β deux réels, et $P \in E$.

$$T_\alpha \circ T_\beta(P) = T_\beta(P) + \alpha\, L(T_\beta(P))\, X = P + (\beta + \alpha)\, L(P)\, X$$

10.8. Avec la question précédente, on remarque que $T_{-\lambda} \circ T_\lambda = \mathrm{Id}_E$. Donc $T_\lambda^{-1} = T_{-\lambda}$.

EXERCICE 2

1. 1.1. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$. On sait que $E(X) = V(X) = \lambda$

1.2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{sh}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et $\mathrm{ch}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

1.3. Deux variables aléatoires sont dites indépendantes pour tout $(x, y) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)$ on a $\mathbb{P}\left((X_1 = x) \cap (X_2 = y)\right) = \mathbb{P}(X_1 = x)\mathbb{P}(X_2 = y)$. On peut aussi dire $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(X_1(\Omega)) \times \mathcal{P}(X_2(\Omega)), \mathbb{P}\left((X_1 \in A) \cap (X_2 \in B)\right) = \mathbb{P}(X_2 \in A)\mathbb{P}(X_2 \in B)$

2. 2.1. On a $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ et on a : $[Y = 0] = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty}[X = 2k]$ et $[Y = 1] = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty}[X = 2k + 1]$.

2.2. De la question précédente, on déduit :

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)\,!} = \frac{1 + \mathrm{e}^{-2\lambda}}{2} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{ch}(\lambda).$$

De même, $\mathbb{P}(Y = 1) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2\lambda}}{2} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda)$. On reconnaît une loi de Bernoulli, on a donc $E(Y) = e^{-\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda)$.

3. Étude de la variable aléatoire T.

3.1. On a $T(\Omega) = \mathbb{N}$.

3.2. On sait que les évènements $[Z = 1], [Z = 2]$ forment un système complet d'évènements. Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T = k) &= \mathbb{P}([Z = 1] \cap [T = k]) + \mathbb{P}([Z = 2] \cap [T = k]) \\ &= \mathbb{P}([Z = 1] \cap [X = k]) + \mathbb{P}([Z = 2] \cap [2X = k]) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(2X = k)\right)\end{aligned}$$

par indépendance.

3.3. De la question précédente, on déduit :

- Si $k = 2p$, alors $\mathbb{P}(T = 2p) = \dfrac{1}{2}\left(\mathbb{P}(X = 2p) + \mathbb{P}(X = p)\right) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\left[\dfrac{\lambda^{2p}}{(2p)\,!} + \dfrac{\lambda^p}{(p)\,!}\right]$
- Si $k = 2p + 1$, alors $\mathbb{P}(T = 2p + 1) = \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}(X = 2p + 1) + \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}(2X = 2p + 1) =$ $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\left[\dfrac{\lambda^{2p+1}}{(2p + 1)\,!}\right]$

3.4. L'évènement $A = [\text{"}T \text{ prend des valeurs paires"}]$ s'écrit : $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty}[T = 2k]$.

On a donc (réunion d'évènements incompatibles) :
$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty}[T = 2k]\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(T = 2k) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)\,!} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k}}{(k)\,!} =$
$\dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2\lambda} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\mathrm{ch}(\lambda) + e^{\lambda}\right)$.

EXERCICE 3

Soit $\alpha \in]0, 1[$.
On se propose d'étudier la série de terme générique $a_n = \dfrac{\sin n^{\alpha}}{n}$, $n \geqslant 1$

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, alors

$$\begin{cases} x^2 \leq x \text{ si } x \in [0, 1] \\ x \leq x^2 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

2. On pose pour tout $t \geqslant 1$, $\varphi(t) = \dfrac{\sin t^{\alpha}}{t}$.

2.1. La fonction $t \mapsto \sin(t^{\alpha})$ est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables sa dérivée sur $[1, +\infty[$ est $t \mapsto \alpha t^{\alpha-1}\cos(t^{\alpha})$.

2.2. φ est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout $t \geqslant 1$, on a $\varphi'(t) = -\dfrac{1}{t^2}\,\sin(t^{\alpha}) + \alpha\,\dfrac{\cos(t^{\alpha})}{t^{2-\alpha}}$.

2.3. Par inégalité triangulaire, pour tout $t \geqslant 1$, $|\varphi'(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{\alpha}{t^{2-\alpha}}$.

2.4. Soit $n \geqslant 1$ et soit $t \in [n, n+1]$. On applique le théorème des accroissement finis entre t et n : Il existe $t_0 \in [n, n+1]$ tel que $|\varphi(t) - \varphi(n)| = |\varphi'(t_0)| \times |t - n|$. Or, d'après la question précédente, on a $|\varphi'(t_0)| \leq \dfrac{1 + \alpha t_0^{\alpha}}{t_0^2} = \dfrac{1}{t_0^2} + \dfrac{\alpha}{t_0^{2-\alpha}} \leq \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$ car $2 - \alpha > 0$.

3. On pose, pour tout $n \geqslant 1$: $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

On a pour tout n : $u_n - a_n = \displaystyle\int_n^{n+1}[\varphi(t) - \varphi(n)]\;\mathrm{d}t$

et donc, par inégalité triangulaire et d'après la question précédente :

$$|u_n - a_n| \leqslant \int_n^{n+1}(t - n)\left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$$

4. **4.1.** La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ puisque $\left|\dfrac{\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

4.2. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Soit $X \in [1, +\infty[$. Le crochet $\left[-\dfrac{\cos(t)}{t}\right]_1^X$ admet une limite finie lorsque X tend vers $+\infty$. On en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ ont même nature. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{X} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, d'après la question précédente, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est bien intégrable.

On peut aussi écrire : Soit $X \in [1, +\infty[$.

Par une intégration par parties, $\displaystyle\int_1^{X} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^X - \int_1^{X} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$

Le crochet possède une limite finie lorsque X tend vers l'infini. Il en résulte que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

5. En effectuant le changement de variable $u = t^\alpha$ (qui est C^1 et strictement croissant car $\alpha > 0$) les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\frac{1}{\alpha}\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ ont même nature. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

6. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge puisque sa somme partielle $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \int_1^{n+1} \varphi(t)\mathrm{d}t$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$ converge.

7. D'après la question **3.**, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(u_n - a_n)$ converge absolument car $2 - \alpha > 1$.

8. Comme les séries $\sum u_n$ et $\sum(u_n - a_n)$ convergent, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge en tant que différence de deux séries convergentes.

9. On suppose que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |a_n|$ est convergente.

9.1. Puisque l'on a : $0 \leqslant \dfrac{\sin^2(n^\alpha)}{n} \leqslant \dfrac{|\sin(n^\alpha)|}{n}$ et d'après ce que l'on a supposé, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$ est convergente par le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

9.2. Soit $X \in [1, +\infty[$, par une intégration par parties, on a

$$\int_1^X \frac{\cos(2x)}{x}\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(2x)}{2x}\right]_1^X + \int_1^X \frac{\sin(2x)}{2x^2}\mathrm{d}x$$

Comme le crochet admet une limite finie, on en déduit que les deux intégrales sont de même nature. Or $\dfrac{\sin(2x)}{2x^2} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ donc l'intégrale est convergente. On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

9.3. En utilisant alors la formule : $\dfrac{\sin^2(n^\alpha)}{n} = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{\cos(2\,n^\alpha)}{2n}$ on obtient que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est convergente, ce qui est faux.

Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ n'est pas absolument convergente

.

EXERCICE 4

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Soient P et Q deux éléments de E.

On note : $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$, où $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.

On a $|P(n)Q(n)2^{-n}| \sim |a_p b_q| n^{p+q} 2^{-n}$ et $|a_p b_q| n^{p+q} 2^{-n} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, la série est donc absolument convergente.

2. On pose pour tous P et Q dans E : $(P|Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\, P(n)\, Q(n)$.

2.1. L'implication $\Leftarrow$ est claire. Soit S tel que $(S|S) = 0$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} S(n)^2 2^{-n} = 0$. La suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} S(n)^2 2^{-n}$ est croissante, positive et de limite nulle, elle est donc nulle. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S(n)^2 2^{-n} = 0$ ce qui implique $S(n) = 0$. Le polynôme S admet une infinité de racines, il est donc nul.

2.2. L'application $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ est symétrique, linéaire par rapport à la première coordonnée donc bilinéaire.
Pour tout $S \in E$, $\sum_{n\geq 0} S(n)^2 2^{-n}$ est une série convergente à termes positifs, sa somme est donc positive. On a montré à la question précédente, que la forme était, de plus, définie positive. On définit donc bien un produit scalaire sur E.

3. **3.1.** La fonction f est définie sur $]-1, 1[$ et sa somme vaut $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$.

3.2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on écrit $\mathrm{e}^{-nx} = (\mathrm{e}^{-x})^n$, la série est donc convergente lorsque e^{-x} appartient à $]-1, 1[$ c'est-à-dire sur $\mathbb{R}_+^\star$.

3.3. Soit g la fonction définie par $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on écrit $\mathrm{e}^{-nx} = (\mathrm{e}^{-x})^n$, on a alors $g(x) = f(\mathrm{e}^{-x})$. La fonction f est C^∞ à l'intérieur de son intervalle ouvert de convergence et pour tout $x > 0$, on a $\mathrm{e}^{-x} \in]-1, 1[$, g est donc C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition.

3.4. Soit $x > 0$. On a $g(x) = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}$ donc $g'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})^2}$ et $g''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})^3}$.

On peut aussi écrire $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$, on a alors $g'(x) = \dfrac{-\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$ puis $g''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^3}$.

3.5. Soit α un entier naturel, on pose $S_\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} n^\alpha 2^{-n}$.

On remarque que $S_0 = g(\ln 2)$, $S_1 = -g'(\ln 2)$ et $S_2 = g''(\ln 2)$. En utilisant les expressions trouvées à la question précédente, on obtient $S_0 = 2, S_1 = 2$ et $S_2 = 6$.

On peut aussi utiliser f. On a $S_0 = f\left(\frac{1}{2}\right)$, $S_1 = \frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right)$ et $S_2 = \frac{1}{4}f''\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 6$.

On admettra que $S_3 = 26$ et $S_4 = 150$.

4. On cherche à calculer la distance du vecteur X^2 au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ dans E muni du produit scalaire défini dans la question **2**.

4.1. On a

$$(X^2 - aX - b|1) = 0 = (X^2 - aX - b, X) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^2 - an - b}{2^n} = 0 \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^3 - an^2 - bn}{2^n} = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b = 6 \\ 6a + 2b = 26 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -2 \end{cases}$$

$X^2 - 5X + 2$ est donc orthogonal à 1 et à X.

4.2. L'ensemble $\left\{\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}(n^2 - cn - d)^2,\ (c,d) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{\|X^2 - P\|^2,\ P \in \mathbb{R}_1[X]\right\}$ possède un minimum car $\mathbb{R}_1[X]$ est de dimension finie et ce minimum est le carré de la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$. Il est réalisé en le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$. Or, on a vu à la question précédente que le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ est $5X - 2$, on a donc

$$\min\left\{\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}(n^2 - cn - d)^2,\ (c,d) \in \mathbb{R}^2\right\} = \|X^2 - 5X + 2\|^2$$

4.3. D'après Pythagore, on a

$$\|X^2 - 5X + 2\|^2 + \|5X - 2\|^2 = \|X^2\|^2$$

On a donc

$$\|X^2 - 5X + 2\|^2 = \|X^2\|^2 - \|5X - 2\|^2 = S_4 - (25S_2 - 20S_1 + 4S_0) = 150 - 150 + 40 - 8 = 32$$

La distance recherchée est $4\sqrt{2}$.

* * * * *

COMMENTAIRES

• Commentaires généraux

Tout d'abord, comme l'an dernier, les mêmes remarques générales :
- Les correcteurs ont signalé à de nombreuses reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées, trop lourdement raturées (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examinateur) : **les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre**. Les résultats doivent être clairement mis en évidence.
Nous nous interrogeons d'ailleurs sur l'opportunité de mettre des points de présentation.
Il semble que les recherches au brouillon ne sont pas dans la panoplie des méthodes à utiliser pour la réalisation de la composition.
- Trop de candidats utilisent des abréviations utilisées par leurs professeurs mais qui n'ont pas toujours de sens pour le correcteur : il vaut mieux les éviter.
- De même, il est préférable de ne pas écorcher le nom et l'orthographe des théorèmes cités : on voit par exemple trop souvent le « le théorème spectrale », « la loi de poisson » etc.
- Il est rappelé que les copies doivent être correctement numérotées, dans un ordre cohérent.
Dans plusieurs copies les questions ne sont pas traitées dans l'ordre : il n'est pas rare de voir en fin de copie ou en fin de feuille double, des réponses à des questions ébauchées plus haut ou qui avaient été passées.
Parfois, on obtient des réponses à des questions d'un exercice au cours de la résolution d'un autre exercice !
La double numérotation est assez souvent omise : au lieu de la question **2.4.**, on lit question **4.**, puis vient la question **3.**.
- Notons que nous avons de nouveau rencontré cette année des copies quasiment illisibles et donc lourdement pénalisées.
- Signalons aussi que l'orthographe fantaisiste donne une très mauvaise impression à la lecture de la copie.
- Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que « il est trivial que », « par une récurrence immédiate », « il est clair que » « forcément » etc... qui indisposent le correcteur : toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.
- De la même façon, les examinateurs ne goûtent guère des arguments inventés ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé : la donnée d'un tel résultat permet en général de poursuivre la résolution de l'exercice sans avoir pu le démontrer : nous apprécions le candidat qui admet clairement le résultat en question pour continuer.
- Il ne suffit pas d'écrire « je peux utiliser le théorème car ses hypothèses sont vérifiées »... , encore faut-il les vérifier !
- Cette année, nous avons avons particulièrement remarqué :
* un mauvais usage des parenthèses :
-> dans les calculs d'intégrales : $\displaystyle\int_{-1}^{1} \lambda P(t) + Q(t)\,\mathrm{d}t$,
-> dans les sommes : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + a_n$,

-> dans les factorielles : $2n!$ au lieu de $(2n)!$ etc.
* la fréquente absence des éléments différentiels dans les intégrales,
* l'utilisation de symboles mathématiques comme des abréviations (par exemple : $\text{Ker}(L) \Longrightarrow L(P) = 0_E$)
- La distinction entre « fonction » et « image d'un réel par une fonction » n'est pas souvent faite : très souvent on rencontre des expressions du type « $\sin(t^\alpha)$ est dérivable et sa dérivée vaut ... »
- Nous conseillons fortement aux candidats de prendre le temps de se relire car cela permet souvent d'éviter des erreurs basiques : par exemple, dans un développement limité, les deux termes de l'égalité ne tendent pas vers la même limite, etc...
- Enfin, un exemple même s'il permet souvent d'aider dans la perception du problème, ne permet pas de démontrer un résultat général.

Les quatre exercices constituant le sujet permettaient de parcourir les parties les plus classiques du programme de deuxième année de classe préparatoire PC.
- Rappelons qu'une lecture attentive de la totalité du sujet permet souvent de comprendre l'architecture et la démarche proposée dans chaque exercice.

- Un trop grand nombre d'étudiants ne maîtrise pas les notions de base d'algèbre linéaire, même de première année, ainsi que les théorèmes principaux d'analyse du programme de deuxième année de PC et espèrent cependant venir à bout des questions posées en utilisant des recettes toutes faites bien souvent mal comprises.
En exemple, le Théorème du rang appliqué à une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ prend parfois des formes étranges : $\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = \dim(\text{Ker}(A) + \dim(\text{Im}(A))$ ou encore, $\dim(A) = \dim(\text{Ker}(A) + \dim(\text{Im}(A))$!
- Nous constatons de nouveau une très grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont trop rapidement abandonnés :
* Les opérations sur les puissances posent encore beaucoup de problème à nombre de candidats.
* On trouve encore trop d'équivalents à 0...
- Les quantificateurs, les symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ sont trop souvent malmenés, voire oubliés lorsqu'ils sont fondamentaux.
- Rappelons que lorsqu'il y a plusieurs variables qui interviennent, il est judicieux de préciser pour quelle variable on cherche un équivalent : une écriture du style $t^{p(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \ldots$ ne veut pas dire grand chose.

- Reste à signaler que les probabilités génèrent un refus de beaucoup de candidats : près de 30% des candidats n'abordent pas cet exercice : rappelons que nous posons systématiquement un exercice de probabilité.

Conclusion : Nous souhaitons obtenir dans la résolution des exercices proposés **de la rigueur**, **une rédaction claire et lisible** et **une justification des résultats en utilisant à bon escient le cours** : ainsi, nous encourageons les candidats à rédiger le plus proprement, correctement et rigoureusement possible leurs copies, en détaillant clairement les calculs effectués et les théorèmes utilisés à chaque étape de la résolution, sans forcément chercher à tout traiter de façon superficielle.
Nous rappelons enfin qu'il vaut mieux admettre clairement le résultat d'une question et avancer dans la résolution du reste de l'exercice plutôt que de donner des arguments faux qui indisposent nécessairement le correcteur.
Nous proposons chaque année dans ce rapport une correction du sujet et invitons vivement les candidats à l'étudier attentivement.

• Commentaires par exercices

Nous avons compilé un certain nombres d'erreurs constatées sur les copies qu'il nous semble important de signaler dans ce rapport afin d'espérer ne plus les rencontrer l'an prochain.

• **Exercice 1**.

Thème de l'exercice : Étude d'une forme linéaire L sur $\mathbb{R}_{2n}[X]$ puis d'un endomorphisme utilisant L sur cet espace.

- **Q1.** : La justification de « forme » est quasiment toujours omise.
- **Q2.** : Le calcul de $L(e_k)$, n'est pas toujours abouti : les cas k pair et k impair ne sont pas traités.
- **Q3.** : Beaucoup d'étudiants oublient qu'ils manipulent une forme linéaire ce qui les amène à effectuer des calculs longs et fastidieux qui n'aboutissent pas. On voit souvent, pour ceux qui utilisent le théorème du rang, que $\dim(\mathbb{R}_{2n}[X]) = 2n$.
  Le fait que la forme linéaire est non nulle est quasiment toujours oublié.
- **Q4.** : Le théorème de la base incomplète est rarement cité.
  Il semble qu'il n'y ait dans $\mathrm{Ker}(L)$ que des vecteurs de la base canonique !
- **Q5.** : Il y a souvent une confusion entre « complémentaire » et « supplémentaire », ce qui amène un candidat à penser qu'il y a une erreur dans l'énoncé puisque le vecteur e_2 n'est ni dans $\mathrm{Vect}(e_0)$, ni dans $\mathrm{Ker}(L)$ et donc, on ne peut avoir $\mathrm{Vect}(e_0) \oplus \mathrm{Ker}(L) = E$.
  Pour montrer que $\mathrm{Vect}(e_0)$ et $\mathrm{Ker}(L)$ sont orthogonaux, certains étudiants tentent d'effectuer le produit scalaire $(\mathrm{Vect}(e_0)|\mathrm{Ker}(L)) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{Vect}(e_0)\,\mathrm{Ker}(L)\,\mathrm{d}t = 0$ puisque $\mathrm{Vect}(e_0) = 0$!
  Enfin pour montrer que les sous-espaces $\mathrm{Vect}(e_0)$ et $\mathrm{Ker}(L)$ sont en somme directe, un nombre non négligeable de candidats tente d'établir que $\mathrm{Vect}(e_0) \cap \mathrm{Ker}(L) = \varnothing$
- **Q6.1.** : La partie « stabilité » est souvent escamotée ou simplement énoncée sans justification.
  Il semble y avoir dans l'esprit de certains une confusion entre dimension et degré : $\deg(T_\lambda(P) \leqslant 2n + 1 = \dim(E)$.
- **Q6.2.** : Il reste souvent un terme résiduel $L^2(P)$ dont l'étudiant ne sait que faire.
- **Q6.3.** : La matrice, lorsqu'elle est proposée sans calculs justificatifs est souvent incorrecte : rappelons que tout résultat énoncé dans la copie se doit d'être justifié.
  On trouve aussi parfois des vecteurs e_j dans la matrice.
- **Q6.4.** : Bien traitée pour ceux qui ont la bonne matrice.
- **Q6.5.** : Traitée par très peu de candidats. L'argument : « la matrice de T_λ n'est pas l'identité » est très rarement évoqué.
- **Q7.** et **Q8.** : très rarement abordées.

• **Exercice 2**.

Thème de l'exercice : Exercice de probabilité à partir d'une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson.

- **Q1.1.** : $X(\Omega)$ est régulièrement oublié et dans $\mathbb{P}(X = k)$ on constate souvent l'oubli d'un ou plusieurs facteurs.
- **Q1.2.** : Parmi les fautes les plus courantes : présence d'un $(-1)^k$, oubli des factorielles, interversion entre **sh** et **ch**, domaine égal à $]-1, 1[$,...
- **Q1.3.** : L'indépendance de deux variables aléatoires discrètes semble très mystérieuse pour beaucoup : « lorsqu'elles ne dépendent pas l'une de l'autre ».
  Cette question de cours que nous pensions facile n'a pas permis aux étudiants de rapporter des points.
- **Q2.1.** : Les réunions sont quasiment toujours absentes. Par exemple, (X pair) se traduit par $X = 2k$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, sans même un quelconque quantificateur.
- **Q2.2.** : Parmi les étudiants qui effectuent correctement les calculs, $Y(\Omega)$ est rarement rappelé.
- **Q3.1.** : Le produit des supports est parfois écrit, sans simplification.
- **Q3.2.** : Souvent l'évènement $(T = k)$ est exprimé à l'aide d'évènements $(X = j)$ et $(2X = j)$ sans expliciter de lien entre k et j.
- **Q3.3.** : Les cas pairs et impairs ne sont pas toujours distingués.
- **Q3.4.** : Confusion entre $\mathbb{P}(T \text{ prend des valeurs paires})$ et $\mathbb{P}(T = 2k)$.

• **Exercice 3**.

Thème de l'exercice : Étude de la convergence simple et absolue d'une série dépendant d'un paramètre.

- **Q1.** : Résultats décevants pour cette question : les cas $x \in [0, 1]$ et $x \geqslant 1$ ne sont pas toujours distingués.
  Une figure permettait de voir efficacement ce qui se passait.
- **Q2.1.** et **Q2.2.** : La continuité voire la continuité par morceaux sert parfois à justifier la dérivabilité.
- **Q2.3.** : La majoration $|\cos(t)| \leqslant 1$ est rare : lui est en général préférée la double inégalité $-1 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$, ce qui entraîne de nombreuses erreurs.
  On a souvent rencontré : $|a - b| \leqslant |a| - |b|$!
- **Q2.4.** : L'appel au théorème des accroissements finis n'est pas souvent fait : il est remplacé par la fausse égalité $\dfrac{\varphi(t) - \varphi(n)}{t - n} = \varphi'(n)$ qui permet d'obtenir l'inégalité demandée.
- **Q3.** : Assez bien réussie dans l'ensemble.
- **Q4.1.** : La valeur absolue est souvent oubliée.
  On lit aussi :
  * les fonctions cos et $\dfrac{1}{t^2}$ sont intégrables sur $[1 + \infty[$ et donc, $\dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1 + \infty[$,
  * $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\cos(t)}{t^2} = 0$ et donc, $\dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1 + \infty[$.

- **Q4.2.** : L'intégration par parties généralisée est souvent faite directement sans justification de convergence.
- **Q5.** : Le changement de variable $t = t^{\alpha}$ ne peut pas fonctionner !
- **Q6.** : La comparaison série/intégrale est souvent évoquée mais, l'écriture $\sum_{n=1}^{+\infty} = \int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ fait alors office de justification de la convergence de la série $\sum u_n$.
- **Q7.** : Attention aux majorations : $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$!
- **Q9.1.** et **9.2.** : Les candidats qui ont abordé cette question pensent bien à utiliser la première question.
  Par contre, souvent, ils ne voient pas de problème de convergence malgré l'apparition de la série harmonique.

• **Exercice 4**.

Thème de l'exercice : Produit scalaire dans $\mathbb{R}[X]$ et projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.

- **Q1.** : Question assez mal réussie.
  Malgré l'énoncé qui parlait de convergence absolue, certains candidats oublient les valeurs absolues.
  D'autres pensent qu'il s'agit d'un produit de Cauchy !
  On a noté que beaucoup de candidats ont des difficultés à calculer la valeur prise par un polynôme en un point : si $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$, le calcul de $P(n)$ pose beaucoup de problèmes.
- **Q2.1.** : Rappelons que ré-écrire l'énoncé ne rapporte pas de point.
  L'argument du polynôme qui possède une infinité de racines est rarement évoqué.
- **Q2.2.** : Le caractère positif est très souvent omis par des candidats qui pensent que cela a été démontré dans la question précédente.
  D'autre tentent en vain de prouver que : $(P|P) \geqslant 0 \Longrightarrow P \geqslant 0$.
- **Q3.1.** : Si la somme de la série géométrique est en général sue il n'en est pas de même de l'ensemble de définition de $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$.
- **Q3.2.** : On a remarqué dans cette question des confusions entre les variables : $\mathrm{e}^{-nx} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et comme la série $\sum \dfrac{1}{x^2}$ converge il en est de même de la série $\sum \mathrm{e}^{-nx}$ pour tout $x > 0$!
- **Q3.4.** : On retrouve les erreurs classiques sur les puissance : $\mathrm{e}^{-nx} = \mathrm{e}^{-n}\,\mathrm{e}^{x}$ et donc $g(x) = \mathrm{e}^{-n} \times f(x)$!
- **Q3.4.** -> **Q4.3.** : Ces questions sont très rarement abordées.
  Signalons cependant que les étudiants qui s'y sont frottés ont en général bien réussi même s'ils ne reconnaissent pas toujours l'utilisation de la projection orthogonale pour calculer la distance demandée.

FIN

Luc VALETTE