Corrigé sujet E3A PC

L'avion SolarStratos

Corrigé
Q1. On se place dans la base sphérique. Le pont M est donc repéré par : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ avec $r = R_T + z$. Les plans $(M; \vec{e}_r; \vec{e}_\theta)$ et $(M; \vec{e}_r; \vec{e}_\varphi)$ sont des plans de symétrie. Le problème est invariant par rotation. De par les symétries et invariances, on peut affirmer que $\vec{g}(M) = g_r(z)\vec{e}_r$. On choisit comme surface de Gauss une sphère Σ de rayon $r = R_T + z$. D'après le théorème de Gauss, on obtient : $\oiint_\Sigma \vec{g}(M).\overrightarrow{dS} = -4\pi G M_{int}$ donc $g_z(z) \times 4\pi(R_T + z)^2 = -4\pi G M_T$ Ainsi $g_r(z) = -\frac{GM_T}{(R_T+z)^2}$ et donc $g(z) = \frac{GM_T}{(R_T+z)^2}$
Q2. $g(z_0) = \frac{GM_T}{(R_T+z_0)^2}$ et $g(z_1) = \frac{GM_T}{(R_T+z_1)^2}$ A.N : $g(z_0) = 9{,}74$ m.s^{-2} et $g(z_1) = 9{,}72$ m.s^{-2}
Q3. A 10^{-1} près, on peut considérer le champ de gravitation comme uniforme. Dans une plus grande rigueur, on peut effectuer un écart relatif $\frac{\lvert 9{,}74-9{,}72\rvert}{9.72} \times 100 \approx 0{,}2\%$ L'écart étant très faible donc on peut considérer le champ uniforme.
Q4. D'après la relation fondamentale de l'hydrostatique : $\overrightarrow{grad}P = \mu\vec{g}$ donc par projection : $$\frac{dP}{dz} = -\mu g$$
Q5. Comme le gaz est supposé parfait, d'après la loi des gaz parfaits : $\frac{P}{\mu} = \frac{RT}{M_{air}}$, 1 il vient :

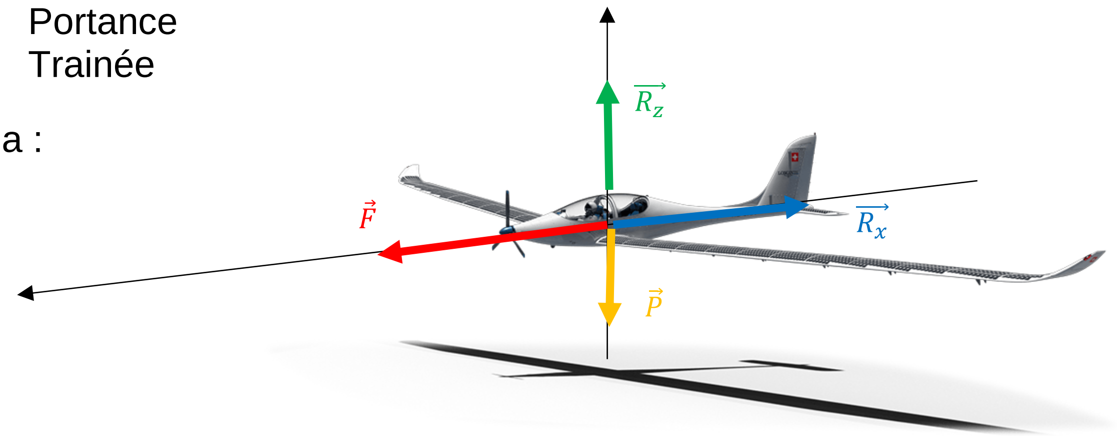
Corrigé
$$\frac{dP}{dz} = -\frac{PM_{air}}{RT}g$$ $$\frac{dP}{P} = -\frac{M_{air}g}{R} \times \frac{dz}{T_0 + a(z - z_0)}$$ $$\int_{P_0}^{P(z)} \frac{dP}{P} = -\frac{M_{air}g}{R} \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{T_0 + a(z - z_0)}$$ $$ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = -\frac{M_{air}g}{Ra} \times ln\left(\frac{T_0 + a(z - z_0)}{T_0}\right)$$ $P(z) = P_0(1 + b(z - z_0)^{\alpha}$ avec $b = \frac{a}{T_0}$ et $\alpha = -\frac{M_{air}g}{Ra}$
Q6. On obtient : $\mu(z_1) = \frac{PM_{air}}{RT} = \frac{P_0\left(1+\frac{a}{T_0}(z_1-z_0)\right)^{-\frac{M_{air}g}{Ra}} \times M_{air}}{R(T_0+a(z_1-z_0))}$ A.N : $\mu(z_1) = 4{,}0 \times 10^{-2}$ kg.m^{-3}.   On obtient un résultat du même ordre de grandeur mais assez éloigné de celui fourni.   Plusieurs explications peuvent être fournies   - Le modèle affine n'est pas forcément judicieux ici   - Le modèle du gaz parfait n'est pas approprié ici. (il est faussé du fait de la forte absorption des UV par l'ozone).

Corrigé

Q7. Les forces sont :

- Poids
- Force de poussée
- Portance
- Trainée

Schéma :



La force de propulsion est choisie horizontale (compatible avec le vol à altitude constante dans la suite du problème)

Q8. Cx et Cz sont sans dimension

$$[C_x] = \frac{[R_x]}{[\mu_1] \times [v^2] \times [S]} = \frac{M.L.T^{-2}}{M.L^{-3}.L^2.T^{-2}.L^2} = 1$$

La démonstration pour le deuxième coefficient est identique

Q9. D'après la relation fondamentale de la dynamique, appliquée au système {avion} dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{R}_x + \vec{R}_z = m\vec{a}$$

On obtient, notant $v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_z)^2}$:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{F}{M} - \frac{1}{2}\frac{\mu_1 C_x S v^2}{M}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\mu_1 C_z S v^2}{M} - g$$

Corrigé	
Q10.	La mouvement étant rectiligne uniforme, les composantes de la vitesse sont constantes. Il vient : $$0 = \frac{F}{M} - \frac{1}{2}\frac{\mu_1 C_x S v^2}{M}$$ $$0 = \frac{1}{2}\frac{\mu_1 C_z S v^2}{M} - g$$ En utilisant la projection sur Oz, on obtient : $$v_C = \sqrt{\frac{2Mg}{\mu_1 C_z S}}$$ A.N : $v_C = 69$ m.s^{-1}.
Q11.	La force s'exprime à l'aide la relation projetée sur l'axe Ox : $$F = \frac{1}{2}\mu_1 C_x S v^2$$ On obtient de de manière plus rigoureuse : $$F = \frac{C_x}{C_z} Mg$$ A.N : $F = 80$ N $\boldsymbol{P} = F \times v_C$ A.N : $P = 5{,}5 \times 10^3$ W
Q12.	L'avion doit donc disposer de $\frac{5500\ W}{0{,}90} \approx 6100\ W$ de puissance électrique et donc de $\frac{6100\ W}{0{,}24} \approx 25\ 000\ W$ soit 25 kW. La surface minimale sera de 21 m^2, à comparer avec la surface de 22 m^2 La surface est donc suffisante et la batterie permettra de compenser les éventuelles dépenses d'énergie supplémentaires (instruments de vol, etc…)

Corrigé	
Q13.	On utilise l'expression $E = \frac{hc}{\lambda}$ avec les longueurs d'onde connues : 400 nm pour le rouge et 800 nm pour le bleu Pour le rouge : $E_{min} =$ $1{,}55$ eV Pour le bleu : $E_{max} =$ $3{,}10$ eV Les photons correspondants à la lumière visible pourront tous participer à la production d'électrons et donc à l'effet photoélectrique.
Q14.	Le bilan s'établit comme suit dans l'élément de volume de section S et de largeur dx Entre t et t + dt, variation du nombre présent dans le volume : $$\frac{\partial N(x,t)}{\partial t} = Sdx\frac{\partial c(x,t)}{\partial t}$$ La quantité de matière qui rentre : $\overrightarrow{j_d}(x,t).\vec{e}_x Sdx = j_d(x,t)Sdx$ La quantité de matière qui sort : $\overrightarrow{j_d}(x+x,t).\vec{e}_x Sdx = -j_d(x+dx,t)Sdx$ On obtient ainsi : $$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t}Sdx = j_d(x,t)Sdx - j_d(x+dx,t)Sdx$$ $$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_d(x,t)}{\partial x}$$
Q15.	On applique la loi de Fick : $\overrightarrow{j_d}(x,t) = -D\overrightarrow{grad}(c(x,t))$ et donc, en projetant et en remplaçant : $$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2}$$

Corrigé

Q16. On remplace :

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = \frac{dA(t)}{dt} e^{\left(\frac{-x^2}{B(t)}\right)} + \frac{x^2}{B^2(t)} \frac{dB(t)}{dt} A(t) e^{\left(\frac{-x^2}{B(t)}\right)}$$

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial x} = -\frac{2xA(t)}{B(t)} e^{\left(\frac{-x^2}{B(t)}\right)}$$

$$\frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2} = \frac{-2A(t)}{B(t)} \left(1 - \frac{2x^2}{B(t)}\right) e^{\left(\frac{-x^2}{B(t)}\right)}$$

On obtient, en réinjectant dans (1)

$$\frac{dA(t)}{dt} e^{\left(\frac{-x^2}{B(t)}\right)} + \frac{x^2}{B^2(t)} \frac{dB(t)}{dt} A(t) e^{\left(\frac{-x^2}{B(t)}\right)} = D \times \frac{-2A(t)}{B(t)} \left(1 - \frac{2x^2}{B(t)}\right) e^{\left(\frac{-x^2}{B(t)}\right)}$$

En $x = 0$:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{-2DA(t)}{B(t)}$$

Donc, en remplaçant $A(t) = \frac{K}{\sqrt{t}}$, on obtient

$$B(t) = 4Dt$$

Et la conservation de la matière entraîne : $\int_0^{+\infty} A(t)\, e^{\left(\frac{-x^2}{B(t)}\right)} S dx = SN_0$

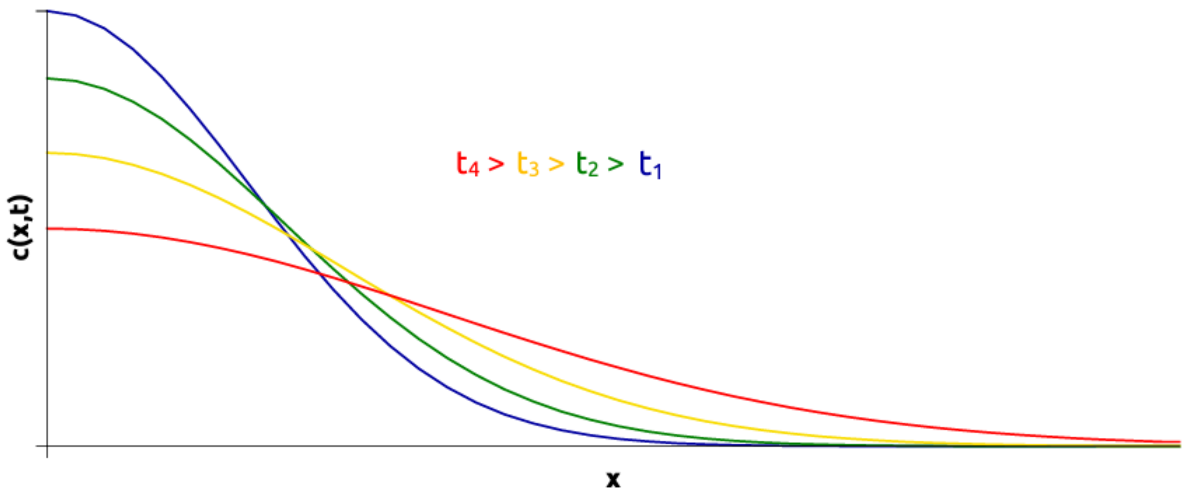
$$\int_0^{+\infty} \frac{K}{\sqrt{t}} e^{\left(\frac{-x^2}{4Dt}\right)} \sqrt{4Dt} dx = N_0$$

$$K\sqrt{4D} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = N_0 \rightarrow K = \frac{N_0}{\sqrt{D\pi}}$$

Ainsi : $c(x,t) = \frac{N_0}{\sqrt{D\pi t}} e^{\left(\frac{-x^2}{4Dt}\right)}$

Corrigé

Q17. Seulement 2 courbes sont attendues, de manière purement qualitative.



Q18. On fixe t_0, on souhaite :

$$c(\delta, t_0) = \frac{c(0, t_0)}{2}$$

$$\frac{N_0}{\sqrt{D\pi t_0}} e^{\left(\frac{-\delta^2}{4Dt_0}\right)} = \frac{N_0}{2\sqrt{D\pi t_0}}$$

$$e^{\left(\frac{-\delta^2}{4Dt_0}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\delta = 2\sqrt{Dt_0 ln2}$$

A.N :

$$\delta = 2\sqrt{3{,}4 \times 10^{-18} \times 3600 \times ln2} = 1{,}8 \times 10^{-7} m$$

Q19. Dans la région $[x_1, 0]$, les électrons ont diffusé dans cette zone, ils sont donc en excès, ainsi $\rho_1 < 0$.
Dans la région $[0, x_2]$, il y a un manque d'électrons, ainsi $\rho_2 > 0$.
La zone est neutre, donc :

$$\rho_1 x_1 - \rho_2 x_2 = 0$$

Q20. Pour répondre à cette question, on peut utiliser les équations de Maxwell

Dans la région $[x_1, 0]$,

Corrigé

$$div\vec{E} = \frac{\rho_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \to E(x) = \frac{\rho_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}(x - x_1)$$

Dans la région $[0, x_2]$,

$$div\vec{E} = \frac{\rho_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \to E(x) = \frac{\rho_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} x - \frac{\rho_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} x_1 = \frac{\rho_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}(x - x_2)$$

On a utilisé ici la continuité du champ électrique

Pour $x > x_2$, On obtient $E(x) = 0$

On peut aussi faire la démonstration avec le théorème de Gauss

Le graphe donne