Sujet

Exercice 1.

Pour tout entier naturel n, on définit sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$ la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur J.

On note alors pour tout x de J, $\varphi(x)$ sa somme.

2. Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur J.

3. Étudier alors sa convergence uniforme sur J.

4. Déterminer $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

5.1. Justifier la convergence de la série de terme général u_n. On note $a = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

5.2. Montrer que l'on a au voisinage de l'infini : $\varphi(x) = \ell + \dfrac{a}{\sqrt{x}} + O\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

Exercice 2.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que la matrice A est à diagonale propre lorsque son polynôme caractéristique est $\chi_A = \prod\limits_{i=1}^{n}(X - a_{ii})$.

1. Donner deux exemples de matrices à diagonale propre qui ne sont pas diagonales.

2. Soient α et β et deux réels et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels α et β pour que M soit une matrice à diagonale propre.

3. Soient X_1, X_2 et X_3 des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et suivant toutes les trois la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$.

3.1. Préciser $X_1(\Omega)$. Donner la loi de la variable aléatoire X_1 et donner sans démonstration les valeurs de son espérance et de sa variance.

3.2. Exprimer l'évènement $[X_1 = X_2]$ sous forme d'une réunion dénombrable d'évènements incompatibles.

3.3. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose : $B(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_1(\omega) - X_2(\omega) \\ 0 & 0 & X_2(\omega) - X_3(\omega) \\ X_1(\omega) - X_2(\omega) & X_2(\omega) - X_3(\omega) & 0 \end{pmatrix}$.

On notera ainsi $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_1 - X_2 \\ 0 & 0 & X_2 - X_3 \\ X_1 - X_2 & X_2 - X_3 & 0 \end{pmatrix}$ la fonction qui, à tout ω de Ω, associe $B(\omega)$.

Déterminer la probabilité pour que B soit une matrice à diagonale propre.

4. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que A^T désigne la matrice transposée de la matrice A.

4.1. Calculer $\mathbf{tr}(A^T A)$ en fonction des coefficients de la matrice A où $\mathbf{tr}(M)$ désigne la trace de la matrice M.

4.2. On suppose dans cette question que A est symétrique réelle.

Démontrer que $\mathbf{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ où les λ_i sont les n valeurs propres distinctes ou non de la matrice A.

4.3. Déterminer les matrices symétriques réelles à diagonale propre.

Exercice 3.

Soient a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Pour tout λ réel, on pose $I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} \, \mathrm{d}t$, lorsque cela existe.

1. **Dans cette question, et uniquement dans cette question**, f est la fonction $t \mapsto \cos\left(\frac{t}{1+t^2}\right)$

1.1. En utilisant un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$, donner un équivalent de $\lambda - f(t)$ lorsque t tend vers l'infini.

1.2. En déduire l'ensemble des valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ existe.

1.3. Donner alors un équivalent de $\int_a^x \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t$ lorsque x tend vers l'infini.

2. On suppose qu'il existe λ et μ deux réels pour lesquels $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ existent. Prouver que l'on a : $\lambda = \mu$.

3. Pour tout x réel, on pose $H_\lambda(x) = \displaystyle\int_a^x (\lambda - f(t))\,\mathrm{d}t$.

3.1. Justifier que H_λ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser $H'_\lambda(x)$.

3.2. Démontrer que si H_λ est bornée sur $\mathbb{R}$, alors $I(\lambda)$ existe et que $I(\lambda) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

4. ésormais on suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$ et $T-$périodique ($T > 0$).

4.1. Démontrer que la fonction φ qui à tout x réel associe $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$ est constante.

Montrer alors que l'on a, pour tout réel x : $H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x) = \lambda T - \displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$.

4.2. Montrer qu'il existe une unique valeur λ_0 du réel λ pour laquelle la suite $(H_\lambda(a+nT))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

4.3. Prouver que, dans ce cas, la fonction H_λ est périodique et bornée dans $\mathbb{R}$.

4.4. Déterminer alors toutes les valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ converge.

4.5. Dans le cas où $\lambda_0 \neq 0$, déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers l'infini.

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $A_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ et $B_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{t}\,\mathrm{d}t$.

5.1. Prouver que A_n existe. On admettra qu'il en est de même pour B_n.

5.2. Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin(t)}$.

5.3. Démontrer que la suite $(A_n - B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

5.4. On effectue dans B_n le changement de variable $u = nt$.

5.4.1. Donner un équivalent de B_n lorsque n tend vers l'infini. On pourra utiliser les résultats établis à la question **4.**

5.4.2. En déduire un équivalent de A_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 4.

Soit E un plan vectoriel, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E et $\theta \in]0, \pi[$ fixé.
On considère l'endomorphisme f de E représenté par sa matrice C dans la base $\mathcal{B}$: $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}$.
On définit alors sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par les relations : $\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \Phi(\vec{j}, \vec{i}) = \cos(\theta)$, $\Phi(\vec{i}, \vec{i}) = \Phi(\vec{j}, \vec{j}) = 1$.
On rappelle qu'une forme bilinéaire sur E est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$, linéaire par rapport à chacune de ses variables.

1. Soient $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ et $Y = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E.
Exprimer $\Phi(X, Y)$ en fonction des réels x_1, x_2, y_1, y_2 et θ.

2. Montrer que Φ est un produit scalaire sur E.

3. Prouver que f est une isométrie pour le produit scalaire Φ.

4. Déterminer un vecteur $\vec{k} \in E$ tel que $(\vec{i}, \vec{k})$ soit une base orthonormée pour Φ et que $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$.

5. Expliciter la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{k})$. Préciser la nature de f.

6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de $\theta \in]0, \pi[$ a-t-on $f^m = \mathrm{id}_E$?

* * * * * *

Correction de l'épreuve

Exercice 1.

Etude d'une série de fonctions

Pour tout entier naturel n, on définit sur l'intervalle $J = [\,1, +\infty[$ la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$$

1. Il s'agit d'une série alternée puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in J$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+nx}} > 0$.

Pour tout $x \in J$, la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+nx}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0.

Le critère spécial des séries alternées nous permet alors de conclure que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur J.

On note alors pour tout x de J, $\varphi(x)$ sa somme.

2. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in J$: $|f_n(x)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+nx}}$ et par suite, $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{\sqrt{1+n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Or, d'après le cours (séries de Riemann), la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

On en déduit que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge pas normalement sur J.

3. Comme il s'agit d'une série alternée, on connaît d'après le cours une majoration du reste $R_n(x)$ pour tout entier naturel n :

$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in J, |f(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2+n}}$.

On obtient ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, une majoration de $\|f(x) - S_n(x)\|$ indépendante de x et tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

On en déduit que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur J.

4. Comme on vient de démontrer que la série convergeait uniformément sur J, on va pouvoir utiliser le théorème de la double limite :

- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = 1$
- La série de fonctions converge uniformément sur J.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\right) = 1$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

5.1. La série de terme général u_n est une série alternée qui converge d'après le critère spécial des séries alternées comma dans la question **1.**

On note $a = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

5.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in J$.

On peut écrire : $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n\,x}}\left(1+\dfrac{1}{nx}\right)^{-1/2} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{nx}}\left(1-\dfrac{1}{2nx}+\dfrac{1}{x}\,o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{x^{3/2}}\left(-\frac{1}{2n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)$$

Toutes les séries étant convergentes, on peut en déduire : $\exists\, A \in \mathbb{R}$ tel que : $\varphi(x) = 1 + \dfrac{a}{\sqrt{x}} + \dfrac{A}{x^{3/2}}$

Et ainsi, lorsque x tend vers l'infini : $\varphi(x) = 1 + \dfrac{a}{\sqrt{x}} + \mathscr{O}\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

Exercice 2.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que la matrice A est à diagonale propre lorsque son polynôme caractéristique est $\chi_A = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - a_{ii})$.

1. Deux exemples de matrices à diagonale propre :

- $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ triangulaire, et donc les valeurs propres sont sur la diagonale.
- $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ triangulaire par blocs.

2. Soient α et β deux réels et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

La matrice M est symétrique réelle, donc diagonalisable.

Les termes de sa diagonale sont tous nuls.Ainsi, si M est à diagonale propre, sa seule valeur propre est 0.

Puisque'elle est diagonalisable, elle est semblable à la matrice nulle, donc égale à la matrice nulle.

Il en résulte que M est à diagonale propre si et seulement si $\alpha = \beta = 0$.

3. Soient X_1, X_2 et X_3 des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et qui suivent toutes les trois la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$.

3.1. C'est du cours : $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X_1 = n) = pq^{n-1} = \dfrac{2^{n-1}}{3^n}$, $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{1}{p} = 3$ et $\mathbb{V}(X_1) = \dfrac{q}{p^2} = 6$.

3.2. L'évènement $[X_1 = X_2]$ signifie que : $\forall \omega \in \Omega$, $X_1(\omega) = X_2(\omega)$,

c'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $X_1(\omega) = k$ et $X_2(\omega) = k$

Il en résulte que l'on a : $[X_1 = X_2] = \bigcup\limits_{k\geqslant 1} ([X_1 = k] \cap [X_2 = k])$

3.3. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose : $B(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_1(\omega) - X_2(\omega) \\ 0 & 0 & X_2(\omega) - X_3(\omega) \\ X_1(\omega) - X_2(\omega) & X_2(\omega) - X_3(\omega) & 0 \end{pmatrix}$.

On notera ainsi $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_1 - X_2 \\ 0 & 0 & X_2 - X_3 \\ X_1 - X_2 & X_2 - X_3 & 0 \end{pmatrix}$ la fonction qui, à tout ω de Ω, associe $B(\omega)$.

Notons DiagP l'évènement : M est à diagonale propre.

D'après les questions précédentes, on a :

$\text{DiagP} = \bigcup\limits_{k\geqslant 1} ((X_1 = k) \cap (X_2 = k) \cap (X_3 = k))$

Par mutuelle indépendance, il vient alors :

$$\mathbb{P}(\text{DiagP}) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathbb{P}(X_1 = n))^3 = \sum_{n=1}^{+\infty} p^3\,(q^3)^{n-1} = \frac{p^3}{1-q^3} = \frac{1}{19}.$$

4. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que A^T désigne la matrice transposée de la matrice A.

4.1. C'est une question quasiment de cours qu'il faut savoir faire correctement.

On va calculer d'abord $\text{tr}(A^T B)$ où A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$.

Notons $A^T = (c_{ij})$. Alors, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_{ij} = a_{ji}$.

Alors, si $A^T B = (d_{ij})$, on a $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $d_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{ik}\,b_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}\,b_{kj}$

Ainsi, $\text{tr}(A^T B) = \sum\limits_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}\,b_{ki} \right)$.

D'où, lorsque $B = A$, on obtient (en changeant les indices) : $\text{tr}(A^T A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2$

4.2. On suppose dans cette question que A est une matrice symétrique réelle.

Ainsi, A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et semblable à $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Alors : $\text{tr}(A^T A) = \text{tr}(A^2) \underset{\text{pourquoi ?}}{=} \text{tr}(\Delta^2) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.

4.3. Si A est symétrique réelle et à diagonale propre, ses valeurs propres sont les a_{ii}, $i \in [\![1, n]\!]$.

Alors, en utilisant les questions précédentes :

$\operatorname{tr}(A^T A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 \Longrightarrow \forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j,\ a_{ij} = 0$ et donc, A est diagonale.

Conclusion : Les matrices symétriques réelles à diagonale propre sont les matrices diagonales.

Exercice 3.

Soient a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout λ réel, on pose $I(\lambda) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, lorsque cela existe.

1. $\boxed{\textbf{Dans cette question, et uniquement dans cette question}, f \text{ est la fonction } t \mapsto \cos\left(\frac{t}{1+t^2}\right).}$

1.1. On a : $\cos(u) \underset{u\to 0}{=} 1 - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$ et donc, $1 - f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t^2}{2(1+t^2)^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2t^2}$

et donc, $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{2t^2} + o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et par suite $\lambda - f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \begin{cases} \lambda - 1 & \text{si } \lambda \neq 1 \\ \dfrac{1}{2t^2} & \text{sinon} \end{cases}$

1.2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

L'application $t \mapsto \dfrac{\lambda - f(t)}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et donc sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

• si $\lambda \neq 1$, alors $\dfrac{\lambda - f(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda - 1}{t} \neq 0$ et qui garde un signe constant au voisinage de $+\infty$.

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge (Riemann).

Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, on en déduit que dans ce cas, $I(\lambda)$ n'existe pas.

• si $\lambda = 1$, alors d'après la question précédente, $\dfrac{1 - f(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2t^3}$.

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t > 0$ converge (Riemann).

Le même théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, on en déduit que $I(1)$ existe.

Conclusion : $I(\lambda)$ existe si, et seulement si $\lambda = 1$.

1.3. On peut écrire pour tout $x \in [a, +\infty[$:

$\displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_a^x \frac{f(t) - 1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_a^x \frac{f(t) - 1}{t}\mathrm{d}t + \ln(x) - \ln(a)$

On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{f(t) - 1}{t}\,\mathrm{d}t = -I(1)$ qui est fini et en divisant par $\ln(x)$, on obtient que :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(x)}\int_a^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = 1,\text{ soit } \int_a^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x).$$

2. On suppose qu'il existe λ et μ deux réels pour lesquels $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ existent.

Si $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ existent, leur différence aussi et donc $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\lambda-\mu}{t}\,\mathrm{d}t$ aussi, ce qui est faux, puisque d'après Riemann, cette intégrale diverge.

Il en résulte que la seule possibilité pour que $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\lambda-\mu}{t}\,\mathrm{d}t$ converge est qu'elle soit nulle, c'est-à-dire que $\lambda=\mu$.

3. Pour tout x réel, on pose $H_\lambda(x)=\displaystyle\int_a^x(\lambda-f(t))\,\mathrm{d}t$.

3.1. L'application $t\mapsto\lambda-f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On en déduit, d'après le Théorème fondamental de l'Analyse que :

l'application $x\mapsto\displaystyle\int_a^x(\lambda-f(t))\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall\,x\in\mathbb{R}$, $H'(x)=\lambda-f(x)$.

3.2. Supposons que H_λ soit bornée sur $\mathbb{R}$: $\exists\,M\in\mathbb{R}_+$ tel que : $\forall\,x\in\mathbb{R}$, $|H_\lambda(x)|\leqslant M$.

On prouve en même temps la convergence de l'intégrale $I(\lambda)$ et la relation demandée.

Pour ce faire, on remarque que l'on a (sous réserve d'existence) :

$I(\lambda)=\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\lambda-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_a^{+\infty}\frac{H'_\lambda(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$

Ceci nous incite à effectuer une intégration par parties en posant :

- $u=\dfrac{1}{t}$ et donc, $\mathrm{d}u=-\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$
- $\mathrm{d}v=H'_\lambda(t)\,\mathrm{d}t$ et par exemple, $v=H_\lambda(t)$.

Comme il s'agit d'intégrales impropres, il est nécessaire de vérifier l'existence du terme $\left[\dfrac{H_\lambda(t)}{t}\right]_a^{+\infty}$:

Puisque H_λ est bornée, on a : $0\leqslant\left|\dfrac{H_\lambda(t)}{t}\right|\leqslant\dfrac{M}{t}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$

Alors, d'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{H'_\lambda(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{H_\lambda(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Or $\left|\dfrac{H_\lambda(t)}{t^2}\right|\leqslant\dfrac{M}{t^2}$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge d'après Riemann.

On en déduit que $I(\lambda)=\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{H'_\lambda(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et que :

$$I(\lambda)=\left[\frac{H_\lambda(t)}{t}\right]_a^{+\infty}+\int_a^{+\infty}\frac{H_\lambda(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t=\int_a^{+\infty}\frac{H_\lambda(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

4. Désormais on suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$ et $T-$périodique ($T>0$).

4.1. La fonction φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème fondamental de l'analyse.

Et : $\forall\,x\in\mathbb{R}$, $\varphi'(x)=f(x+T)-f(x)=0$ puisque f est $T-$périodique.

Il en résulte que la fonction φ est constante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que l'on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x) = \int_x^{x+T} (\lambda - f(t))\ \mathrm{d}t = \int_x^{x+T} \lambda\,\mathrm{d}t - \int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \lambda T - \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

en utilisant le début de la question.

4.2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après la question précédente, on peut écrire :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ H_\lambda(a+(k+1)T) - H_\lambda(a+kT) = \lambda T - \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On somme alors ces égalités de $k=0$ à $k=n-1$.

Il vient alors : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, (car l'égalité est aussi valable lorsque $n=0$:

$$H_\lambda(a+nT) = H_\lambda(a) + n\left(\lambda T - \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Or, si $\left(\lambda T - \displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\right) \neq 0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left|\lambda T - \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\right| = +\infty$ et la suite $(H_\lambda(a+nT))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

Il en résulte qu'une condition nécessaire sur λ pour que la suite $(H_\lambda(a+nT))_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée est que le terme $\lambda T - \displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$ soit nul, ce qui donne : $\lambda_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$.

• On pouvait aussi dire que d'après la question précédente, la suite $(H_\lambda(a+nT))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $\lambda T - \displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$ et donc, qu'elle est bornée si et seulement si cette raison est nulle, ce qui redonne $\lambda_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$.

4.3. Le résultat de la question **4.1.** permet alors d'affirmer que la fonction H_{λ_0} est périodique de période T.

Etant continue sur le segment $[0,T]$ la fonction H_{λ_0} y est bornée et sa périodicité entraîne qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

4.4. D'après la question **3.2.**, la fonction H_{λ_0} étant bornée, l'intégrale $I(\lambda_0)$ converge.

D'après la question **2.**, c'est la seule valeur de λ pour laquelle l'intégrale converge.

Conclusion : $I(\lambda)$ converge si et seulement si $\lambda = \lambda_0$.

4.5. On reprend la démonstration de la question **1.3.** avec λ_0 à la place de 1 et on obtient :

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda_0\ \ln(x).$$

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $A_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ et $B_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{t}\,\mathrm{d}t$.

5.1. Pour $n \geqslant 1$, la fonction $h_n : t \mapsto \dfrac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

L'équivalent $\sin(u) \underset{u \to 0}{\sim} u$ permet de la prolonger par continuité en 0 en posant $h_n(0) = n$.

En notant encore h_n le prolongement obtenu, h_n est continue sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et A_n existe.

5.2. Pour t au voisinage de 0 : $\psi(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin(t)} = \dfrac{\sin(t) - t}{t\sin(t)} \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{-t^3/6}{t^2} = -\dfrac{t}{6}$.

5.3. D'après la question précédente, on prolonge la fonction ψ par continuité sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Il en résulte que ψ est bornée sur ce segment : $\exists\, M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall\, t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $|\psi(t)| \leqslant M$.

Ainsi : $|A_n - B_n| \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi/2} |\sin(nt)|\, M \,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{\pi M}{2}$ et la suite $(A_n - B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

5.4. Équivalents de A_n et B_n lorsque n tend vers l'infini.

5.4.1. Le changement de variable $u = nt$ dans B_n donne :

$B_n = \displaystyle\int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u}\,\mathrm{d}u + \int_{\frac{\pi}{2}}^{n\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u}\,\mathrm{d}u \ (*)$

découpage réalisé afin de pouvoir appliquer les résultats de la question **4.**.

L'application $u \mapsto |\sin(u)|$ est $\pi-$périodique et donc, en utilisant donc les résultats de la question **4.**, on a :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{n\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u}\,\mathrm{d}u \underset{n \to +\infty}{\sim} \lambda_0 \ln\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

où l'on vérifie bien que $\lambda_0 \neq 0$: $\lambda_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} |\sin(u)|\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(u)\,\mathrm{d}u = \dfrac{2}{\pi}$.

En utilisant alors $(*)$ après avoir constaté que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u}\,\mathrm{d}u$ est une constante, on obtient finalement :

$$B_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln(n).$$

5.4.2. En écrivant alors que l'on a pour tout entier naturel n : $A_n = (A_n - B_n) + B_n$ et le résultat de la question **5.3.** (la suite $(A_n - B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée), on en déduit que :

$$A_n \underset{n \to +\infty}{\sim} B_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln(n).$$

Exercice 4.

Soient E un plan vectoriel, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E et $\theta \in]\,0, \pi[$ fixé.

On considère l'endomorphisme f de E représenté par sa matrice C dans la base $\mathcal{B}$: $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

On définit alors sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par les relations :

$$\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \Phi(\vec{j}, \vec{i}) = \cos(\theta) \text{ et } \Phi(\vec{i}, \vec{i}) = \Phi(\vec{j}, \vec{j}) = 1.$$

On rappelle qu'une forme bilinéaire sur E est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$, linéaire par rapport à chacune de ses variables.

1. Soient $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ et $Y = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E.

En utilisant la bilinéarité de Φ, on obtient :

$\Phi(X, Y) = x_1y_1\,\Phi(\vec{i}, \vec{i}) + x_1y_2\,\Phi(\vec{i}, \vec{j}) + x_2y_1\,\Phi(\vec{j}, \vec{i}) + x_2y_2\,\Phi(\vec{j}, \vec{j})$

Puis, en utilisant la symétrie et l'énoncé :

$\Phi(X, Y) = x_1y_1 + (x_1y_2 + x_2y_1)\cos(\theta) + x_2y_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$

2. Il suffit de montrer que Φ est définie positive puisque l'énoncé nous affirme que Φ est bilinéaire et symétrique.

Soit alors $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in E$.

Alors $\Phi(X, X) = x_1^2 + 2x_1x_2\cos(\theta) + x_2^2 = (x_1 + x_2\cos(\theta))^2 - \cos^2(\theta)\,x_2^2 + x_2^2$

$= (x_1 + x_2\cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)\,x_2^2 \geqslant 0$ et Φ est positive.

On a ensuite : $\Phi(X, X) = 0 \iff \begin{cases} x_1 + x_2\cos(\theta) = 0 \\ \text{et} \\ x_2\sin(\theta) = 0 \end{cases} \iff (x_1 = x_2 = 0) \iff X = 0$

puisque $\theta \in]0, \pi[$ et ainsi, Φ est définie.

Conclusion : Φ définit un produit scalaire sur E.

3. Pour prouver que f est une isométrie pour le produit scalaire Φ, on va montrer que pour tout vecteur X de E, on a : $\Phi(f(X), f(X)) = \Phi(X, X)$.

Soit donc $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in E$.

Facilement, $f(X) = x_1\,f(\overrightarrow{i}) + x_2\,f(\overrightarrow{j}) = -x_2\,\overrightarrow{i} + (x_1 + 2x_2\cos(\theta))\,\overrightarrow{j}$ et donc :

$\Phi(f(X), f(X)) = (-x_2)^2 + (x_1 + 2x_2\cos(\theta))^2 - 2x_2\,(x_1 + 2x_2\cos(\theta))\cos(\theta)$

$= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1\,x_2\cos(\theta) = \Phi(X, X)$

et f est une isométrie de E pour le produit scalaire Φ.

4. On va utiliser le procédé de Gram-Schmidt en orthonormalisant la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

- Par hypothèse, $\Phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}) = 1$ et $\overrightarrow{i}$ est de norme 1 pour le produit scalaire Φ.
- On pose $\overrightarrow{k}' = \overrightarrow{j} - \Phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})\,\overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} - \cos(\theta)\,\overrightarrow{i}$
- On a : $\Phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}') = 0$ et $\Phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}') = \sin^2(\theta) > 0$

On prend donc $\overrightarrow{k} = \dfrac{\overrightarrow{k}'}{\Phi(\overrightarrow{k}', \overrightarrow{k}')} = -\dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\,\overrightarrow{i} + \dfrac{1}{\sin(\theta)}\,\overrightarrow{j}$.

5. La première colonne de la matrice C donne $f(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{j}$ et comme $\overrightarrow{j} = \sin(\theta)\,\overrightarrow{k} + \cos(\theta)\,\overrightarrow{i}$, la première colonne de la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$ est $\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}$.

Mais on sait que f est une isométrie et que son déterminant vaut 1 ($\det(C) = 1$, invariant par changement de base)

Ainsi, f est une rotation et $\text{Mat}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}) = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$: f est la rotation d'angle θ.

6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. f^m est la rotation d'angle $m\,\theta$.

Ainsi, $f^m = \text{id}_E \iff m\,\theta \in 2\pi\,\mathbb{Z}$ et, comme $\theta > 0$, $\theta \in \left\{\dfrac{2\,k\,\pi}{m},\ k \in \mathbb{N}^*\right\}$.