

Rapport du jury - 2026 - PC

Commentaires généraux

Moyenne : 6,41 et écart type : 3,13 sur 2341 copies.

Le sujet de cette année est composé de trois exercices qui couvrent une bonne partie du programme des classes préparatoires : un exercice d'algèbre linéaire simple en dimension 5 proposait la réduction d'une matrice antisymétrique grâce à son carré, un exercice d'analyse traitait d'un opérateur fonctionnel dont on étudiait l'action dans deux cas particuliers simples en utilisant des fonctions définies par des intégrales fonctions de leur borne supérieure, et un exercice de probabilités s'intéressait à l'optimisation de la variance d'une variable aléatoire finie, au moyen de l'étude d'extrema d'un polynôme de $\mathbb{R}^2$ sur un triangle.

Les questions détaillées devaient permettre à un étudiant bien préparé de montrer toutes ses compétences. Le bilan est assez mitigé avec très peu de bonnes copies. Il faut déplorer un trop grand nombre de copies avec des erreurs sur des notions pourtant fondamentales telles « primitives », « vecteur gradient », etc., et un lot non négligeable de copies très faibles de candidats ne parvenant par exemple pas à étudier la fonction $x \mapsto x(1 - x)$.

Rappelons que :

- les questions préliminaires, ou questions de cours, servent à aider le candidat dans sa recherche des solutions aux questions qui suivent,
- les questions s'enchaînent et les résultats établis servent en général à traiter les questions suivantes,
- les énoncés des exercices sont parsemés de réponses afin de pouvoir avancer dans leur résolution : il n'est pas nécessaire de raconter n'importe quoi pour arriver de toute force au résultat annoncé,
- il n'est pas judicieux de changer l'énoncé proposé, par exemple en prenant des valeurs particulières,
- dans une majorité de copies, on ne répond pas à la question mais on se contente de donner une formule ou une expression sans préciser le lien avec la question posée,
- enfin, **une affirmation sans démonstration n'a aucune valeur.**

En conclusion, lire attentivement l'énoncé en étudiant toutes les interactions entre les questions reste d'une importance capitale pour réussir cette épreuve.

Il nous semble important de signaler le nombre grandissant de copies mal présentées (renumérotation des questions, jeu de piste pour suivre l'ordre de ces questions, etc...) , mal écrites, raturées dans tous les sens : cela démontre **un réel mépris du candidat vis à vis du correcteur**. Cela nous incite à introduire dans le barème un nombre non négligeable de points pour la présentation.

Rappelons qu'apprendre à rédiger correctement un problème de mathématiques et à bien présenter une copie en vue des concours nécessite un **entraînement** tout au long des deux années de CPGE.

- Force est de constater **des lacunes énormes et inquiétantes en algèbre linéaire** : les notions de base ne sont pas acquises du tout, même les plus simples telles : « déterminer le rang d'une matrice carrée d'ordre 5 », « définition d'un automorphisme ».

Beaucoup de candidats confondent « rang d'une matrice » et « taille de cette matrice ».

Rappelons que, contrairement à une idée reçue, les valeurs propres d'une matrice ne sont pas les coefficients diagonaux de cette matrice.

Les candidats n'hésitent pas à contredire l'énoncé : « la matrice M est inversible » et deux lignes plus loin : « 0 est la seule valeur propre de la matrice M » : il serait judicieux de se relire avant de rendre sa copie.

Rappel : le théorème spectral est masculin et donc, inutile de mettre un « e » à spectral.

- Nous avons vu encore trop souvent que la dérivée de la fonction $x \mapsto \int_a^x h(t) dt$ lorsque h est continue, est la fonction $h(x) - h(a)$.

Il ne vient qu'à très peu de personnes l'idée de vérifier que la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{x+t}$, pour $x > 0$ et $t \in [0, 1]$ a un dénominateur strictement positif.

Le lien entre les questions des deux exemples et les questions préliminaires est rarement fait.

- Le calcul des probabilités n'est pas toujours maîtrisé.
 - Le calcul de l'espérance de X^2 est parfois assez folklorique.
 - Beaucoup d'étudiants semblent ignorer que la variance est positive et s'annule pour une variable quasi-certaine.
- Le triangle attendu n'est pas toujours là : il se transforme en un carré ou un disque.
- Les fonctions à plusieurs variables semblent souvent très mystérieuses :
 - dériver par rapport à une variable est parfois un grand challenge,
 - bien que l'énoncé demande de déterminer « le **vecteur** gradient », on lit : $\nabla f(m) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$,
 - le théorème « des bornes atteintes » est rarement bien appliqué,
 - même si l'énoncé demandait de prouver que la fonction f n'admettait pas de point critique, certains candidats en trouvent et calculent la matrice hessienne en ces points
- Plus grave : certains candidats n'arrivent pas à dresser le tableau de variation correct de la fonction $x \mapsto x(1-x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$ et sont incapables de déterminer les extrema de cette fonction.

Commentaires par exercice

Dans un souci d'aider les étudiants à préparer la prochaine session, nous signalons dans ce compte rendu les erreurs les plus répandues ou les plus grossières à ne pas commettre. Ces erreurs sont repérées par

un • et retranscrites telles qu'elles ont été relevées dans les copies (avec les fautes, donc, aussi bien de mathématiques que de syntaxe).

EXERCICE 1

On rappelle que si A est une matrice, alors A^T désigne sa transposée.

Questions préliminaires

Soit g un endomorphisme d'un espace vectoriel réel H .

1. Soit μ une valeur propre de g . Montrer que μ^2 est valeur propre de $g^2 = g \circ g$.

Quelques définitions étonnantes d'une valeur propre. Le fait que x qui vérifie $g(x) = \mu x$ est non nul est rarement évoqué.

Certains confondent valeur propre et élément du noyau. On lit par exemple :

- μ est une valeur propre de g et donc, $g(\mu) = 0$,
- μ est une valeur propre de g et donc, $\forall x \in H, g(x) = \mu x$,
- μ est une valeur propre de g et donc, $\mu = \frac{g(x) - \lambda y}{x - y}$,
- $g \circ g = g(g(x)) = g(\mu x) = \mu \mu x = \mu^2 x$.

2. Montrer que si x est vecteur propre de g^2 associé à une valeur propre non nulle, alors $g(x)$ est un vecteur propre de g^2 .

Il est assez fréquent que le candidat considère que x est aussi vecteur propre de g .

Le fait que $g(x)$ n'est pas le vecteur nul est rarement vérifié.

- $\chi_{g^2} = \chi_g \times \chi_g$,
- $g^2(x) = g(g(x))$ et donc, $g(x)$ est vecteur propre de g^2 ,
- μ^2 est valeur propre de g^2 signifie que μ^2 annule g ,
- certains lisent mal l'énoncé : si x est vecteur propre de g^2 associé à une valeur propre nulle, alors $g^2(x) = 0 = 0.x$.

3. Démontrer que deux sous-espaces propres de g associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

Bien que cette question soit une question de cours, la réussite ne fut pas toujours au rendez-vous.

Certains candidats tentent de prouver que $E_\lambda \cap E_\mu = \{\emptyset\}$ quand d'autres ne savent pas très bien ce qu'il faut prouver.

- Soient $x \in E_\lambda$ et $y \in E_\mu$. On démontre que $x \cap y = \emptyset$.

4. Soit A une matrice carrée d'ordre $n \geq 2$ à coefficients réels.

Exprimer, sans démonstration, $\det(-A)$ et $\det(A^T)$ en fonction de $\det(A)$.

Pour la grande majorité des candidats, $\det(-A) = -\det(A)$.

- $\det(A^\top) = (\det(A))^\top$.

* * * * *

On note $E = \mathbb{R}^5$ muni du produit scalaire usuel noté $(x|y) = X^\top Y$, où X et Y sont les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs x et y dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_j)_{j \in \llbracket 1,5 \rrbracket}$, orthonormale pour ce produit scalaire.

Soit f l'endomorphisme de E défini par sa matrice M dans la base $\mathcal{B}$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Premières propriétés de l'endomorphisme f

5.1. Déterminer la matrice $M + M^\top$.

Question en général réussie bien que certains candidats, lorsqu'ils trouvent la matrice dont tous les éléments sont nuls, reconnaissent Id_E .

- La transposée de la matrice M est la matrice obtenue à partir de M par symétrie par rapport à la deuxième diagonale.

5.2. Montrer que f n'est pas un automorphisme de E .

La notion d'automorphisme reste très floue dans beaucoup de copies.

Beaucoup d'étudiants déterminent $\text{Ker}(f)$ ou utilisent la méthode du pivot.

- Soit $x = (0, 0, 0, 0, 1)$, alors $f(x) = -1$ et $x = (0, 0, 6, 0, 1)$ alors $f(x) = -1$, donc f n'est pas un automorphisme,
- $M^2 \neq M$ et f n'est pas un automorphisme,
- f est un automorphisme $\iff M \times M^\top = I_5$,
- la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ n'est pas symétrique et donc, f n'est pas un automorphisme,
- d'après 5.1. $M^\top = -M$ et donc f n'est pas un automorphisme car sinon, on aurait $M^\top = M$,
- $M^2 \neq I_5$ et donc, f n'est pas un automorphisme,
- Théorème du rang : $\dim(\mathcal{M}_5(\mathbb{R})) = \text{rg}(M) + \dim(\text{Ker}(M))$,
- $M^2 \neq M$ et donc, f n'est pas un automorphisme de E ,

- $\text{Ker}(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est de dimension 2,

- On a : $M(M + M^\top) = 0$ et donc, $M + M^\top \in \text{Ker}(f) \implies \text{Ker}(f) \neq \{0\} \implies f$ n'est pas un automorphisme,

- comme $(x|f(y)) \neq (f(x)|y)$, f n'est pas un automorphisme.

5.3. Déterminer le rang de la matrice M .

La relation entre le rang et le noyau est quelquefois très curieusement énoncée.

- $\text{rg}(M) = 5$ puisque M est de taille 5,
- $\text{rg}(M) = -1$,
- $\text{rg}(M) = 24$ car $\dim(\mathcal{M}_5(\mathbb{R})) = \text{rg}(M) + \dim(\text{Ker}(M))$.

5.4. Prouver que f^2 est un endomorphisme symétrique de E .

Il est rarement signalé le caractère orthonormal de la base dans laquelle est écrite la matrice de f^2 , ce qui donne rarement une réponse totalement correcte.

- La matrice M^2 est la matrice dont les coefficients sont les carrés des coefficients de la matrice M ,
- s est un endomorphisme symétrique si, et seulement si, $s \circ s = s$,
- s est un endomorphisme symétrique si, et seulement si, $s \circ s = \text{Id}_E$ et donc, $f(f(x)) = f(M)$,
- M^2 est un endomorphisme symétrique de E puisque $M^2 \times M^2 = \text{Id}_5$ ou $M^2 \times (M^2)^\top = I_5$.

5.5. Justifier alors que la matrice M^2 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.

Question en général bien traitée.

- M^2 est symétrique, donc f^2 est symétrique, donc son polynôme caractéristique est scindé à racines simples et donc, f^2 est diagonalisable.

5.6. Montrer que f vérifie la propriété : $\forall (x, y) \in E^2, (f(x)|y) = -(x|f(y))$.

Question en général bien traitée.

Attention cependant à la taille des produits matriciels effectués :

- $(f(x)|y) = MXY^\top$ et $(x|f(y)) = X(MY)^\top = -XY^\top M$.

6. Étude des éléments propres de l'endomorphisme f

6.1. Montrer que 0 est la seule valeur propre de f .

On pourra utiliser la question précédente.

Peu de candidats pensent à exploiter $(x|f(x)) = 0$, comme le suggérait l'énoncé.

- $\lambda(x|y) = -\lambda(x|y)$ et donc, $\lambda = 0$: très fréquent,
- $(f(x_1)|x_2) = -(x_1|f(x_2)) \iff (\lambda_1 x_1|x_2) = -(x_1|\lambda_2 x_2)$
 $\iff \lambda_1(x_1|x_2) = -\lambda_2(x_1|x_2) \iff \lambda_1 = -\lambda_2 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0$,

- $\det(\lambda X - \text{Id}) = \begin{vmatrix} X & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & X & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & X & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & X & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & X \end{vmatrix} = (X - 0) = X$ et donc, 0 est la seule valeur propre de f ,

- $\chi_M(X) = X^5$ et donc, 0 est la seule valeur propre de f .

6.2. En déduire que l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

En général, la question est bien rédigée, la technique maîtrisée.

- Comme 0 est valeur propre, f n'est pas diagonalisable.

6.3. Démontrer que les valeurs propres non nulles de f^2 sont strictement négatives.

Les candidats qui réussissent cette question calculent le polynôme caractéristique de M^2 .

- $\chi_{M^2} = (X + 1)^2 (X + 2)^2$ car les coefficients diagonaux de M^2 sont -1 et -2 ,
- comme M^2 est diagonalisable, la trace de M^2 qui est somme des valeurs propres est négative donc, toutes ses valeurs propres sont négatives.

On admet dans la suite que les valeurs propres distinctes de f^2 sont 0, -1 et -3.

7. Prouver que : $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Pour beaucoup d'étudiants, le fait que $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$ suffit pour conclure.

On pense peu à utiliser l'orthogonalité.

Beaucoup tentent d'utiliser des bases en utilisant la recherche de l'image et du noyau faite dans les questions précédentes.

Globalement, peu de réussite pour cette question classique.

- Soit $x \in \text{Ker}(f)$, $f(x) = 0$. Soit $x \in \text{Im}(f)$, $\exists y \in E$ tel que $f(x) = y$. Ainsi, x ne peut pas être nul et égal à $y \neq 0$,
- $f(x) = 0$ car $x \in \text{Ker}(f)$ et $f(x) = x$ car $x \in \text{Im}(f)$,
- Soit $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$: $f(x) = 0$ et $\exists a \in E$ tel que $f(a) = x$. Donc, $f^2(a) = 0$ et $a \in \{0, -1, -3\}$. Or $f^2(x) = 0$, donc $a = 0$, donc $x = 0$,
- Soit $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$, alors $f(x) = 0$ et $\exists y \in E$ tel que $f(x) = y$ et donc, $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.

8. Soient λ une valeur propre non nulle de f^2 et x un vecteur propre associé.

8.1. Montrer que les vecteurs x et $f(x)$ forment une famille libre.

Beaucoup de sottises dans cette question. La problématique d'une famille libre est souvent mal posée.

C'est dans cette question qu'après une suite de calculs vains, le candidat conclut : « et donc, la famille $(x, f(x))$ est libre ».

- Soient a et b deux réels tels que $ax + bf(x) = 0$, et donc, $a f(x) + \lambda x = 0$.
Ainsi : $ax + bf(x) = \lambda x + a f(x)$. Par identification, $a = \lambda b$ et $b = a$ et ainsi, $a = b = 0$,
- x est vecteur propre associé à f^2 , alors $f(x)$ est vecteur propre de g^2 . Sachant que f^2 est symétrique, alors il existe une base $(x, f(x), \dots, f^5(x))$ de f^2 et donc, x et $f(x)$ ne sont pas colinéaires.

8.2. Justifier que $(x, f(x))$ engendre un plan vectoriel de $\text{Im}(f)$.

La plupart des candidats qui abordent cette question oublient de vérifier que c'est un plan vectoriel de $\text{Im}(f)$.

- $f = \text{Vect}(X)$, ce qui engendre un plan vectoriel de $\text{Im}(f)$.

9. Soient u un vecteur propre de f^2 associé à la valeur propre -1 et v un vecteur propre de f^2 associé à la valeur propre -3 .

Montrer que $(u, f(u), v, f(v))$ est une base de $\text{Im}(f)$.

On pourra utiliser des questions préliminaires.

Les candidats qui ont abordé cette question ont eu du mal à faire la synthèse des questions précédentes, malgré l'indication de l'énoncé. Cela entraîne beaucoup de verbiage vaseux.

10. Déterminer des réels α, β, γ et δ tels que la matrice M soit semblable à la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 \end{pmatrix}.$$

Question rarement abordée et rarement aboutie. L'idée d'utiliser une base adaptée est rarissime.

EXERCICE 2

Questions préliminaires

1. Écrire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $t \mapsto e^t$ en 0.

Il est inadmissible qu'un nombre non négligeable de candidats ne sachent pas répondre correctement à cette question.

La notion même de développement limité semble ne pas être maîtrisée de tous.

- $e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} + o(t^n),$
- $e^t = 1 + t e^t + \frac{t^2}{2} e^t + o(t^2),$
- $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2},$
- $e^t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2),$ voire $e^t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^n).$

2. Soient h une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Justifier que la fonction $H : x \mapsto \int_a^x h(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée.

Nous posons souvent cette question et force est de constater qu'elle se transforme encore en un fiasco total.

Après un verbiage confus et inefficace (« la formule fondamentale du calcul intégral ») pour prouver que H est de classe $\mathcal{C}^1$, on trouve encore très souvent $H'(x) = h(x) - h(a)$.

La notion de primitive semble totalement inconnue de trop de candidats.

On constate une confusion entre « H est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ » et « H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ » et entre les mots « intégrale » et « primitive ».

Sans parler de :

- H est continue, donc intégrable,
- $H'(x) = \int_a^x h'(t) dt$,
- $H'(x) = \int_0^1 h(t) dt$, en ayant dérivé les bornes,
- $\frac{\partial H(x)}{\partial x} = \int_0^x \frac{\partial h(t)}{\partial x} = 0$.

3. En déduire que la fonction $G : x \mapsto \int_x^{x+1} h(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

Réponse souvent juste avec un raisonnement faux.

- G est la primitive de h sur le segment $[x, x+1]$ et donc, $G'(x) = h(x+1) - h(x)$.

* * * * *

4. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Justifier que la fonction $F : x \mapsto \int_0^1 \frac{f(t)}{x+t} dt$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Normalement, il n'y aurait pas du y avoir de problème d'intégration à paramètre. Mais, comme beaucoup de candidats s'y sont engouffrés, on constate un manque de précision quant à la variable utilisée : est-ce la variable d'intégration ou la variable paramètre ?

On voit très rarement signaler que $t \mapsto \frac{f(t)}{x+t}$ est continue car f l'est et que, pour $x > 0$ et $t \in [0, 1]$, $x+t > 0$.

- $\frac{f(t)}{x+t}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$,
- $\left| \frac{f(t)}{x+t} \right| \leq |f(t)|$ car lorsqu'on divise, on obtient quelque chose de plus petit,
- si $x > 0$, il n'y a pas de problème d'intégration en 0 et en 1 et $F(x)$ est définie,

Soit l'application T qui à toute fonction f , continue sur $[0, 1]$, associe la fonction F :

$$T(f) = F.$$

5. Un premier exemple

On pose pour tout entier naturel n , $f_n : t \in [0, 1] \mapsto t^n$ et $F_n = T(f_n)$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

5.1. Calculer $F_0(x)$.

Pas trop de souci pour cette question.

- $F_0(x) = \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt = [\ln(t)]_0^1 = +\infty$.

5.2. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $F_k(x) + xF_{k-1}(x)$.

Question facile en général correctement traitée bien que certains aient du mal à intégrer $\int_0^1 t^{k-1} dt$.

- $F_k(x) + xF_{k-1}(x) = \int_0^1 \frac{t^k + xt^{k-1}}{x+t} dt$ et IPP pour obtenir 0 comme résultat.

5.3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que :

$$\frac{F_k(x)}{(-x)^k} - \frac{F_{k-1}(x)}{(-x)^{k-1}} = \frac{(-1)^k}{k} \left(\frac{1}{x} \right)^k.$$

La réponse étant donnée, la plupart des candidats arrivent au résultat, même au prix d'esbroufes, durement sanctionnées.

5.4. En déduire que, pour tout entier naturel n , il existe un polynôme P_n , que l'on déterminera, tel que :

$$F_n(x) = (-x)^n \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - P_n \left(\frac{1}{x} \right) \right).$$

Beaucoup d'étudiants ont du mal à exploiter le résultat de la question précédente bien que son résultat ait été présenté sous forme télescopique.

Du coup, beaucoup tentent de raisonner par récurrence avec plus ou moins de bonheur.

On a encore vu assez souvent :

- Supposons que pour tout k , la propriété soit vérifiée.

6. Un deuxième exemple

Soient $g : t \in [0, 1] \mapsto e^t$ et $G = T(g)$, c'est-à-dire :

$$G : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt.$$

6.1. En effectuant le changement de variable $u = x + t$, prouver que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

L'indication donnée n'a pas été comprise, sans doute car beaucoup n'ont pas écrit $e^{u-x} = e^u e^{-x}$ et sorti le e^{-x} de l'intégrale. Ainsi, dans la majorité des copies, on repart dans des explications confuses ou inexacts avec les théorèmes sur les intégrales à paramètre ou le théorème fondamental de l'analyse

appliqué directement sur l'expression $G(x) = \int_x^{x+1} \frac{e^{u-x}}{u} du$.

- $u = x + t \implies t = u - x$ et $dt = du - dx$,
- $\int_x^{x+1} \frac{e^{u-x}}{u} du = [e^{u-x} \ln(u)]_x^{x+1} = e^1 \ln(x+1) - e^0 \ln(x)$.

6.2. On pose, lorsque cela existe :

$$J(x) = \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt \quad \text{et} \quad K(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+t} dt.$$

6.2.1. Montrer que J et K sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

S'il n'y a pas eu trop de problème pour $K(x)$ (la référence à une question préliminaire est rarement évoquée et les arguments sont parfois très vaseux), beaucoup n'ont pas vu qu'il fallait justifier l'existence de $J(x)$ à la borne 0.

6.2.2. Montrer que la fonction $L : x \mapsto G(x) e^x - e K(x) + J(x) + \ln(x)$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Cette question a été rarement traitée.

Certains tentent, sans grand succès de calculer $L(x)$ au lieu de dériver.

- Après de longs calculs, $L(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{t} dt$ et donc, L est constante,
- $L'(x) = \int_{e^x}^{e^{x+1}} \frac{dv}{\ln(v)} + e = 0$,
- $L(x+1) - L(x) = 0$ et donc, L est constante.

6.2.3. En déduire enfin la limite de $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x)$ et un équivalent de $G(x)$ lorsque x tend vers 0^+ .

Question très rarement abordée et quasiment jamais achevée.

EXERCICE 3

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$.

On pose, pour tout $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, $p_k = \mathbb{P}(X = k) \in [0, 1]$ et on se propose de déterminer pour quelles valeurs des $(p_k)_{k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket}$, la variance $\mathbb{V}(X)$ est maximale, puis minimale.

1. Déterminer les valeurs possibles pour la variable aléatoire X^2 .

Nous sommes surpris des résultats obtenus :

- $X^2 = \{1\}$,
- $X(\Omega) = \{1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$,
- $X^2(\Omega) = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$,
- $X^2(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$,
- $X^2(\Omega) = \{1, 2, 3\}^2$.

2. Calculer $\mathbb{E}(X^2)$, l'espérance de la variable aléatoire X^2 .

Souvent bien exprimé, mais le transfert de la loi X n'est pas toujours évoqué.

- $\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}$.

3. Exprimer la variance $\mathbb{V}(X)$ de la variable aléatoire X à l'aide des seuls paramètres p_1 et p_2 .

La réponse étant donnée dans la question suivante, on se débrouille pour y arriver à tout prix.

4. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 4x + y - 4x^2 - y^2 - 4xy.$$

On note T l'ensemble fermé et borné défini par : $T = \{(x, y) \in [0, 1]^2, x + y \leq 1\}$.

4.1. *Représenter graphiquement T dans le plan muni d'un repère orthonormé.*

Le tracé du domaine T fournit un bestiaire assez original, allant d'une partie de la boule unité à un demi-plan, en passant par un rectangle.

4.2. *Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.*

Beaucoup de copies calculent les dérivées partielles d'ordre 2, et comme elles sont de classes $\mathcal{C}^2$, f aussi.

- D'après le théorème de Schwarz, f est de classe 2,
- les applications $x \mapsto f(x, y)$ et $y \mapsto f(x, y)$ étant des polynômes, donc de classe $\mathcal{C}^2$, il en est de même de f .
- comme $f''(x, y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$, il en est de même de f .

4.3. *Montrer que f possède des extrema dans T .*

Quelques candidats pensent bien au théorème « des bornes atteintes », mais en oubliant d'évoquer la continuité de la fonction f .

Souvent, on constate que les candidats se précipitent sur la recherche des points critiques (T est fermé) et même sur l'utilisation de la matrice hessienne.

4.4. *Soit $m = (x, y)$ un point de $\mathbb{R}^2$. Déterminer le vecteur gradient $\nabla f(m)$, de f , en m .*

Stupeur de constater que pour énormément de candidats, le **vecteur** gradient (pourtant outil banal en Physique) est un nombre, obtenu en additionnant les dérivées partielles.

4.5. *Prouver que f ne possède pas de point critique dans l'intérieur de T .*

De façon étrange, cette question est souvent correctement traitée, même si le résultat de la question 4.4. est erroné.

4.6. *On note g la fonction réelle de la variable réelle qui à tout x réel associe $g(x) = x(1 - x)$. Dresser le tableau des variations de la fonction g sur l'intervalle $[0, 1]$ et en donner une représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé.*

Le tracé et l'étude de cette fonction simple pose souvent problème. On voit souvent un triangle au lieu d'une parabole.

4.7. *Déterminer alors les extrema de f dans T .*

La question (facile) est assez peu abordée et pas toujours avec les précisions attendues.

5. *Résoudre alors le problème posé au début de l'exercice.*

Quelques tentatives mais une résolution claire et nette du problème est rarissime.

6. *Que peut-on dire de la variable aléatoire X lorsque sa variance est minimale ?*

Question rarement abordée. Rappelons que d'une façon générale, la variance d'une variable aléatoire est positive et s'annule pour une variable quasi-certaine.

- Pour $(p_1, p_2) = (0, 1)$, la variance est minimale et vaut -4 .

Luc Valette.