

Rapport du jury - 2026 - MP

Commentaires généraux

Moyenne : 7,25 et écart type : 4,11 sur 2911 copies.

Le sujet de cette année est composé de trois exercices qui couvrent une bonne partie du programme des classes préparatoires : un exercice d'algèbre linéaire mettant en oeuvre les principaux théorèmes du cours de deuxième année, un exercice d'analyse portant sur le calcul d'intégrales dans lequel il était indispensable de bien connaître les résultats fondamentaux du cours d'analyse de deuxième année et enfin, un exercice de probabilité qui faisait appel aux développements limités.

Les correcteurs sont unanimes pour constater un manque de rigueur général dans les copies : pas de quantificateurs, pas de phrases correctes d'explications. Il ne suffit pas d'invoquer le théorème bidule pour s'autoriser à faire n'importe quoi : les hypothèses doivent être clairement énoncées et vérifiées avant d'appliquer le théorème.

Rappelons que :

- les questions préliminaires servent à aider le candidat dans sa recherche des solutions aux questions qui suivent,
- les questions s'enchaînent et les résultats établis servent en général à traiter les questions suivantes,
- les énoncés des exercices sont parsemés de réponses afin de pouvoir avancer dans leur résolution : il n'est pas nécessaire de raconter n'importe quoi pour arriver de toute force au résultat annoncé,
- il n'est pas judicieux de changer l'énoncé proposé, par exemple en prenant des valeurs particulières,
- enfin, **une affirmation sans démonstration n'a aucune valeur.**

En conclusion, lire attentivement l'énoncé en étudiant toutes les interactions entre les questions reste d'une importance capitale pour réussir cette épreuve.

Il nous semble important de signaler le nombre grandissant de copies mal présentées (renumérotation des questions, jeu de piste pour suivre l'ordre de ces questions, etc...) , mal écrites, raturées dans tous les sens : cela démontre **un réel mépris du candidat vis à vis du correcteur**. Cela nous incite à introduire dans le barème un nombre non négligeable de points pour la présentation.

Rappelons qu'apprendre à rédiger correctement un problème de mathématiques et à bien présenter une copie en vue des concours nécessite un **entraînement** tout au long des deux années de CPGE.

- Nous pensons que faire étudier l'endomorphisme $P \mapsto P(X+1)$ ne poserait pas de gros problème à la majorité des étudiants. Or, force est de constater **des lacunes énormes et inquiétantes en algèbre linéaire** : les notions de base ne sont pas acquises du tout, même les plus simples telles : « écrire la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée », « calculer le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire supérieure ». On constate un joyeux mélange entre matrice inversible, matrice diagonalisable, matrice triangulaire, voire matrice « diagonale supérieure ».

Les candidats n'hésitent pas à se contredire : « la matrice M est inversible » et deux lignes plus loin : « 0 est valeur propre de la matrice M » : il serait judicieux de se relire avant de rendre sa

copie. Par ailleurs, le lien entre « 0 valeur propre de M » et « M non inversible » semble inconnu de beaucoup.

Enfin, pour une partie des candidats, bien que n soit un entier naturel supérieur ou égal à 2, les calculs sont faits avec $n = 2$, au mieux avec $n = 3$.

- Étudier la convergence d'une intégrale est souvent un exercice qui demande une grande virtuosité : la continuité de la fonction n'est quasiment pas invoquée, les équivalents sont pris n'importe comment, et surtout, la convergence absolue semble être inconnue de beaucoup de candidats.

Le simple énoncé des théorèmes d'inversion (série/intégrale, limite/série, Fubini pour les familles sommables) est assez peu maîtrisé, encore moins la vérification des hypothèses.

Des résultats simples comme la somme de la série géométrique et son domaine de validité, ne sont pas toujours connus.

- Le maniement des développements limités reste une épreuve d'une haute technicité pour beaucoup de candidats.

Il est **inadmissible que des étudiants de deuxième année ne connaissent pas les développements limités des fonction $t \mapsto e^{at}$ et $t \mapsto \ln(1 + at)$ en 0, au moins à l'ordre 2.**

- Comme d'habitude, les probabilités ne semblent pas être ce que préfèrent les candidats. La notion de variable aléatoire est très confuse pour beaucoup.

Commentaires par exercice

Dans un souci d'aider les étudiants à préparer la prochaine session, nous signalons dans ce compte rendu les erreurs les plus répandues ou les plus grossières à ne pas commettre. Ces erreurs sont repérées par un • et retranscrites telles qu'elles ont été relevées dans les copies (avec les fautes, donc, aussi bien de mathématiques que de syntaxe).

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 5.

On rappelle que $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ est le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n - 1$, à coefficients complexes.

Dans tout l'exercice, on confondra un polynôme et sa fonction polynomiale associée.

Pour tout endomorphisme v de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et tout entier naturel m , on rappelle que : $v^0 = Id$ où Id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et lorsque m est non nul, $v^m = v \circ v^{m-1}$.

On considère l'application u définie par :

$$\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], u(P) = Q \text{ où } Q(X) = P(X+1).$$

1. Étude de u

1.1. Vérifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Question a priori facile mais qui pose problème :

- u est linéaire comme noyau d'une application linéaire,
- On a : $\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], u(P) = Q$ et comme $Q(X) = P(X+1)$, alors u est un morphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et aussi u est bijective et u est un morphisme de groupe,
- u est linéaire puisque les polynômes sont linéaires,
- $u(P+Q) = u(P) + u(Q)$ et donc, u est un morphisme de groupe : c'est un endomorphisme.

1.2. Soit $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$ la base canonique ordonnée de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, c'est à dire :

$$\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P_j(X) = X^j.$$

Pour tout $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, déterminer l'expression de $u(P_j)$ dans la base $\mathcal{B}$.

En général, on trouve bien que $u(P_j) = (X+1)^j$ mais ça se gâte souvent lorsqu'il faut développer.

Quelques exemples :

- $(X+1)^j = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} X^k (-1)^{j-k},$
- $u(P_j) = 1 + (X+1) + (X+1)^2 + \dots + (X+1)^{n-1},$
- $u(P_j) = (X+1)^j$ et on applique le binôme de Newton : $u(P_j) = \sum_{k=0}^j P_k$, ou $u(P_j) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} X^j$
- $(X+1)^k = \sum_{k=3}^{n-2} \binom{n-2}{k} X^k,$
- $u(P_j) = X^j.$

1.3. Déterminer alors la matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$.

On fera clairement apparaître sur la copie les deux premières colonnes ainsi que la k -ième colonne de la matrice M pour un entier naturel $k \in \llbracket 3, n-2 \rrbracket$.

Encore trop de X^k dans la matrice : **il est inadmissible qu'un étudiant de MP ne sache pas écrire le matrice d'un endomorphisme dans une base.**

$$\bullet M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2^{n-1} \\ 1 & X+1 & \dots & (X+1)^{n-1} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ 1 & X^n+1 & \dots & (X^n+1)^{n-1} \end{pmatrix}$$

1.4. Déterminer le polynôme caractéristique χ_u de l'endomorphisme u .

En général, pas trop de souci sur cette question, bien que certains étudiants ne sachent pas développer le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure.

Quelques relations étranges du type :

- $(X - 1)^n = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{2i\pi/n}),$
- $(X - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k.$

1.5. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Beaucoup de sottises sur cette question. Beaucoup de candidats ont l'air de confondre matrice triangulaire et matrice diagonale.

Quelques exemples :

- Le polynôme $(X - 1)^n$ est scindé à racines simples,
- χ_u n'est pas scindé à racines simples et donc u n'est pas diagonalisable,
- la matrice de u est trigonalisable, donc diagonalisable,
- comme le rang de u est égal au degré de χ_u , u est diagonalisable,
- l'endomorphisme est diagonalisable car il est scindé à racine simple.

1.6. Justifier que l'endomorphisme u est un automorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et préciser u^{-1} .

Étonnant que le lien avec la question précédente ne soit pas toujours fait pour prouver que u est un automorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$: beaucoup d'étudiants cherchent $\text{Ker}(u)$, voire $\text{Im}(u)$ sans toujours beaucoup de succès.

Ne pas oublier de justifier que $u^{-1} : P \mapsto P(X - 1)$.

Quelques exemples :

- M est inversible car c'est une matrice diagonale (après avoir trouvé la bonne matrice à la question 1.3.),
- u est un endomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, $\text{Mat}(u) = (X, \dots, X^j)$, u est diagonalisable, u est réversible et donc, u est bijectif et $u^{-1} = \frac{1}{X^{j+1}}$,
- $\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], \exists P^{-1} \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $PP^{-1} = \text{Id}$,
- M est une matrice triangulaire supérieure, elle est donc inversible,
- u est un isomorphisme car chaque antécédent admet exactement une unique image par u et $u^{-1} : P(X + 1) \mapsto P(X)$,
- il suffit de montrer que u possède $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ comme co-domaine,
- puisque u est un endomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, il vient que $\dim(\mathbb{C}_{n-1}[X]) = \text{rg}(u) = n = \text{rg}(M)$ et donc, u est surjectif,
- χ_u est scindé à racine simple, de multiplicité n et il y a exactement n racines donc u est bijective.

1.7. Déterminer M^{-1} .

Question bien traitée par les candidats qui ont trouvé la bonne expression de u^{-1} .

Parfois, comme à la question 1.2. quelques soucis avec la formule du binôme de Newton pour déterminer $(X - 1)^j$.

1.8. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer u^k .

Il manque souvent la justification du résultat annoncé. Dire que par une récurrence évidente on obtient le résultat : $u^k(P) = P(X+k)$ ne suffit pas.

Mais aussi :

- On montre par récurrence sur k que $u^k(P) = P^k(X+1)$.

2. On note $\Delta = u - \text{Id}$.

2.1. Montrer que Δ est nilpotent avec : $\Delta^n = 0$.

Trop de résultats énoncés sans démonstration. Trop peu de candidats pensent au théorème de Cayley Hamilton.

Quelques exemples :

- La matrice Δ a des 0 sur la diagonale et donc, $\Delta^n = O_n$,
- $(u - \text{id})^n = 0 \iff u^n = \text{id}$ et donc, u est inversible d'inverse $u^{-1} = u^{n-1}$,
- toute matrice qui n'a que des 0 sur la diagonale est nilpotente et donc $\Delta^n = 0$,
- $\Delta^n = 0$ car au fur et à mesure du n , on dérive u .

2.2. L'endomorphisme Δ est-il diagonalisable ?

Beaucoup de raisonnement faux sur cette question simple.

Par exemple :

- $\Delta^n = O_n$ et O_n est diagonalisable et donc, par changement de base, Δ est diagonalisable,
- l'endomorphisme Δ est diagonalisable, u l'est et donc, Δ est une décomposition de Dunford,

- $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & \cdots & \cdots & * \\ 0 & X & (*) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X \end{vmatrix} = X^{n-1} - \lambda.$

3. Démontrer qu'il existe des entiers relatifs $(a_k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} \in \mathbb{Z}^n$, que l'on déterminera, tels que :

$$\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], \quad P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0.$$

Il ne faut pas oublier de justifier l'utilisation de la formule du binôme de Newton pour développer $(u - \text{Id})^n$ et de vérifier que les coefficients trouvés sont bien des éléments de $\mathbb{Z}$.

EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, a désigne un nombre réel.

Pour tout réel $s > 1$, on appelle $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ et l'on rappelle que : $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Justifier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2 + a^2}$.

Ne pas oublier que l'on manipule des séries à termes positifs.

Quelques exemples :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = 0^+$ et donc, u_n est convergente,
- l'intégrale converge d'après le théorème de Rayman.

2. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{e^t - 1} dt$.

La valeur absolue est quasiment toujours oubliée. Apparaissent des majorations parfois très exotiques.

- f est continue comme quotient de fonctions dérivables,
- La fonction $t \mapsto \frac{\sin(at)}{e^t - 1}$ étant continue sur $]0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{e^t - 1} dt$ converge.

3. Prouver que, pour tout $t > 0$, $\frac{1}{e^t - 1} = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-kt}$.

Le fait de démarrer la somme à $k = 1$ en a dérouté plus d'un.

On rencontre souvent « $e^{-t} < 1$ » pour justifier la convergence de la série.

- Comme $t \mapsto e^{-t}$ est majoré par 1, la fonction $t \mapsto \frac{1}{1 - e^{-t}}$ est développable en série entière.

4. Prouver que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} (\sin(at)) e^{-kt} dt = \frac{a}{a^2 + k^2}$.

En général, cette question a été bien traitée. Ceux qui s'en sortent le mieux sont ceux qui utilisent la partie imaginaire de $\int_0^{+\infty} e^{(ia-k)t} dt$.

- $\int_0^{+\infty} (\sin(at)) e^{-kt} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^k (\sin(at)) e^{-kt} dt$.

5. Démontrer que : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{e^t - 1} dt = a \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + k^2}$.

On pourra utiliser, en la démontrant, l'inégalité valable pour tout $x \in \mathbb{R} : |\sin(x)| \leq |x|$.

Le théorème utilisé sera cité avec précision et on s'assurera que ses hypothèses sont bien vérifiées.

- Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est une série entière qui converge uniformément sur $] -1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$,
- Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin(x)| \leq 1 \leq |x|$.

6. Déterminer : $\lim_{a \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + k^2}$.

Le théorème utilisé sera cité avec précision et on s'assurera que ses hypothèses sont bien vérifiées.

7. Développement en série entière de la fonction $H : a \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{e^t - 1} dt$

7.1. Prouver que :

$$\forall a \in]-1, 1[, \forall k \geq 1, \frac{1}{a^2 + k^2} = \frac{1}{k^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{a}{k}\right)^{2n}.$$

La justification $0 < \left(\frac{a}{k}\right)^2 < 1$ n'est pas toujours clairement exprimée : souvent, $\frac{a}{k} < 1$ suffit.

$$\bullet \frac{1}{k^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{a}{k}\right)^{2n} = \frac{1}{k^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{2n \ln(a/k)}.$$

7.2. Démontrer alors que :

$$\forall a \in]-1, 1[, H(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \zeta(2n+2) a^{2n+1}.$$

Quasiment aucune justification correcte de ce résultat.

7.3. Montrer que H est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$.

On constate que malgré le titre de la question : « développement en série entière de la fonction H », très peu de candidats répondent correctement à cette question, ainsi qu'à la suivante, se lançant dans des calculs vains et inutiles.

7.4. Déterminer $H^{(p)}(0)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

8. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt$ est convergente.

9. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_p = \int_0^1 t^p \ln(t) dt$ converge.

10. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer I_p .

$$\bullet \text{ On a : } I_p = -\frac{1^{p+1}}{p+1} \text{ qui tend vers 0 lorsque } p \text{ tend vers l'infini et donc, } I_p \text{ converge.}$$

11. Prouver que :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}.$$

Manque de justifications.

$$\bullet \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \text{ on reconnaît une série géométrique de raison } \frac{1}{p} \text{ et donc :}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt = \frac{1 - \left(\frac{1}{p}\right)^3}{1 - \frac{1}{p}}.$$

Le théorème utilisé sera cité avec précision et on s'assurera que ses hypothèses sont bien vérifiées.

12. Déterminer enfin la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt$.

EXERCICE 3

Question de cours

1. Soient a un réel non nul et n un entier naturel non nul, écrire le développement limité en 0 des fonctions :

- $t \mapsto e^{at}$ à l'ordre n ,
- $t \mapsto \ln(1 + at)$ à l'ordre 2.

Résultats surprenants : comment des étudiants de deuxième année MP peuvent ne pas connaître ces développements limités ?

- $e^{at} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(at)^n}{n!} + o(at^n),$
- $\ln(1 + at) = -at + (at)^2 + o(at),$
- $\ln(1 + at) = 1 - \frac{(at)^2}{2} + o\left(\frac{(at)^2}{2}\right),$
- $e^{at} = \sum_{n=0}^{+\infty} a t^n = 1 + at + (at)^2 + \dots + (at)^n + o((at)^n).$

* * * * *

Pour X une variable aléatoire discrète finie, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on note $(x_i)_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket}$ avec $0 \leq x_1 < \dots < x_k$, où k est un entier naturel supérieur ou égal à 1, les valeurs prises par la variable aléatoire X avec une probabilité non nulle. On pose :

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = x_i) = p_i > 0.$$

On définit alors l'application Φ_X de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \Phi_X(t) = \frac{1}{t} \ln \left(\sum_{i=1}^k p_i e^{x_i t} \right).$$

2. Étude d'exemples

2.1. Déterminer Φ_X si X est une variable aléatoire certaine à valeur dans $\mathbb{R}_+$.

L'expression variable aléatoire certaine n'est manifestement pas connue de tous les candidats.

2.2. Soit Z une variable aléatoire telle que :

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{2}.$$

2.2.1. Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\Phi_Z(t)$.

Trop peu de copies abordent cette question facile.

$$\bullet \Phi_Z(t) = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{1}{2} (1 + e^t) \right) = \frac{1}{t} \ln \left(\sqrt{1 + e^t} \right).$$

2.2.2. Montrer que Φ_Z peut être prolongée en une fonction $\tilde{\Phi}_Z$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour ceux qui abordent cette question, le développement limité qu'ils obtiennent ne permet pas de prolonger en une fonction « dérivable » : ils se contentent d'un prolongement qui est continu.

3. Étude générale. On suppose pour la suite que $k \geq 2$.

3.1. Déterminer un développement limité de Φ_X à l'ordre 1 en 0.

Rappelons que e^0 n'est pas égal à 0.

Il serait judicieux pour certains de revoir les propriétés du logarithme.

3.2. En déduire que Φ_X peut être prolongée en une fonction $\tilde{\Phi}_X$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

Mêmes remarques qu'à la question **2.2.2.**

3.3. Montrer que $\tilde{\Phi}_X(0)$ est égal à $\mathbb{E}(X)$, l'espérance de la variable aléatoire X .

Pour ceux qui connaissent l'espérance d'une variable aléatoire, ce résultat est évident.

3.4. Reconnaître $\tilde{\Phi}'_X(0)$.

Question quasiment pas traitée, ainsi que les suivantes.

3.5. Déterminer les limites de $\tilde{\Phi}_X$ en $+\infty$ et $-\infty$.

3.6. La fonction $\tilde{\Phi}_X$ peut-elle être impaire ? On justifiera soigneusement la réponse proposée.

4. Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Déterminer une relation entre $\Phi_X(t)$ et $\mathbb{E}(e^{tX})$, espérance de la variable aléatoire e^{tX} .

5. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes finies, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et indépendantes.

Trouver une relation entre Φ_{X+Y} , Φ_X et Φ_Y .

Luc Valette.