

Rapport du jury - 2026 - MPI

Commentaires généraux

Moyenne : 5,68 et écart type : 3,20 sur 624 copies.

Le sujet de cette année est composé de trois exercices qui couvrent une bonne partie du programme des classes préparatoires : un premier exercice mélangeant algèbre linéaire, probabilités et fonctions à plusieurs variables mettant en oeuvre les principaux théorèmes du cours de deuxième année, un exercice d'analyse portant sur les séries de fonctions dans lequel il était indispensable de bien connaître les résultats fondamentaux du cours d'analyse de deuxième année et enfin, un exercice d'algèbre linéaire sur la diagonalisation d'une matrice carrée de rang 2.

Rappelons que :

- les questions préliminaires ou questions de cours servent à aider le candidat dans sa recherche des solutions aux questions qui suivent,
- les questions s'enchaînent et les résultats établis servent en général à traiter les questions suivantes,
- les énoncés des exercices sont parsemés de réponses afin de pouvoir avancer dans leur résolution : il n'est pas nécessaire de raconter n'importe quoi pour arriver de toute force au résultat annoncé,
- il n'est pas judicieux de changer l'énoncé proposé, par exemple en prenant des valeurs particulières,
- enfin, **une affirmation sans démonstration n'a aucune valeur.**

En conclusion, lire attentivement l'énoncé en étudiant toutes les interactions entre les questions reste d'une importance capitale pour réussir cette épreuve.

Il nous semble important de signaler le nombre grandissant de copies mal présentées (renumérotation des questions, jeu de piste pour suivre l'ordre de ces questions, etc...) , mal écrites, raturées dans tous les sens : cela démontre **un réel mépris du candidat vis à vis du correcteur**. Cela nous incite à introduire dans le barème un nombre non négligeable de points pour la présentation.

Rappelons qu'apprendre à rédiger correctement un problème de mathématiques et à bien présenter une copie en vue des concours nécessite un **entraînement** tout au long des deux années de CPGE.

- Force est de constater **des lacunes inquiétantes en algèbre linéaire** : les notions de base ne sont pas acquises du tout, même les plus simples telles : « déterminer le rang d'une matrice dont tous les éléments sont des 1 », « déterminer un polynôme annulateur de degré 2 ». On constate un joyeux mélange entre matrice symétrique, matrice inversible, matrice diagonalisable !

La notion de « matrice symétrique définie positive » est totalement inconnue par la plupart des candidats.

Les valeurs propres d'une matrice M ne sont pas contrairement à une croyance très répandue, les termes de la diagonale de cette matrice.

La plupart des candidats confondent « dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre λ » et « ordre de multiplicité de cette valeur propre ».

Enfin, pour une partie des candidats, bien que n soit un entier naturel supérieur ou égal à 2, les calculs sont faits avec $n = 2$, au mieux avec $n = 3$!

Les fonctions à plusieurs variables restent souvent très mystérieuses :

- dériver par rapport à une variable est parfois un grand challenge,
- bien que l'énoncé demande de déterminer une fonction h des $n - 1$ premières variables, la réponse dépend souvent des n variables du départ !

— la matrice Hessienne est $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$: encore une fois, $n = 2$ paraît beaucoup tenter les candidats.

- Il est difficile de justifier correctement la convergence de séries numériques de signe quelconque : la convergence absolue semble étrangère à de nombreux candidats.

Le simple énoncé des théorèmes d'inversion (série/intégrale, limite/série, Fubini pour les familles sommables) est assez peu maîtrisé, encore moins la vérification des hypothèses.

Des résultats simples comme la somme de la série géométrique et son domaine de validité, ne sont pas toujours connus.

- Dans ce dernier exercice d'algèbre linéaire, on retrouve les lacunes évoquées dans le premier exercice : difficulté à déterminer le rang d'une matrice, lien entre rang et 0 valeur propre, mélange entre ordre de multiplicité d'une valeur propre et dimension de son sous-espace propre, diagonalisabilité.

Le recherche d'une base du noyau d'un endomorphisme de rang 2 donné par sa matrice dans une base s'avère mission impossible pour moult candidats.

En conclusion, pour réussir cette épreuve, une connaissance solide du cours ne suffit pas : les candidats doivent également veiller à la rigueur des raisonnements, à la précision des justifications et à la qualité de la rédaction.

Le jury rappelle enfin que les questions préliminaires, souvent proches du cours, constituent un appui essentiel pour aborder les questions plus difficiles du sujet.

Commentaires par exercice

Dans un souci d'aider les étudiants à préparer la prochaine session, nous signalons dans ce compte rendu les erreurs les plus répandues ou les plus grossières à ne pas commettre. Ces erreurs sont repérées par un • et retranscrites telles qu'elles ont été relevées dans les copies (avec les fautes, donc, aussi bien de mathématiques que de syntaxe).

EXERCICE 1

Questions préliminaires

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Vérifier que $\varphi : t \mapsto t^n$ est une fonction convexe sur $]0, 1[$.

Question en général correctement traitée.

2. Écrire l'inégalité de convexité de Jensen pour cette fonction.

L'inégalité de convexité de Jensen est inconnue par plus de 9 candidats sur 10 !

3. Soient p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et J la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On note I_p la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

- 3.1. Déterminer un polynôme annulateur de J de degré 2.

Beaucoup de candidats ne traitent que les cas $p = 2$ ou $p = 3$!

D'autres calculent le polynôme caractéristique et n'arrivent pas à obtenir $P = X(X - p)$.

Rappelons que si l'énoncé demande un polynôme annulateur de degré 2, le plus simple semble de commencer par calculer J^2 .

- $\chi_J(x) = x^2 - \text{tr}(J)x + \det(J)$ et donc, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme $X^2 - \text{tr}(J)X + \det(J)$ est annulateur de J ,
- $\text{rg}(J) = 1$ et la somme des coefficients d'une ligne donne p , donc $\text{tr}(J) = p$, et ainsi, p est valeur propre double de J : $(X - 1)^2$ est polynôme annulateur de J ,
- On montre par récurrence que $J^2 = pJ$.

- 3.2. En déduire les valeurs propres possibles de $I_p + J$.

Il n'est pas naturel pour la plupart des candidats de déduire de la question précédente que l'on a : $\text{Sp}(J) \subset \{0, p\}$.

La plupart des étudiants cherchent le polynôme caractéristique de la matrice $I_p + J$: le passage de $\text{Sp}(J)$ à $\text{Sp}(I_p + J)$ semble totalement ignoré.

- En utilisant la technique de sommation des lignes et des colonnes, on trouve que $p + 1$ est valeur propre de $I_p + J$.

- 3.3. Justifier alors que la matrice $I_p + J$ appartient à $\mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que $I_p + J$ est une matrice symétrique réelle définie positive.

On lit trop souvent : $M \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$ ou que $M \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R}) \iff$ les coefficients de M sont strictement positifs !

* * * * *

Soient n et r deux entiers naturels avec $n \geq 2$ et $r \geq 3$.

On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à r résultats différents $(\alpha_j)_{j \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ de probabilités respectives $(x_j)_{j \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ avec : $\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, x_j \in]0, 1[$.

On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite au-dessus, ce qui définit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour tout $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on note X_j la variable aléatoire telle que $X_j(\Omega) = \{0, 1\}$, et pour tout $\omega \in \Omega$:

- $X_j(\omega) = 0$ si α_j est obtenu au moins une fois à l'issue de ces n épreuves,
- $X_j(\omega) = 1$ sinon, c'est-à-dire si α_j n'est jamais obtenu.

Enfin, on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

4. Une expression de l'espérance de X

4.1. Soit $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Déterminer la loi de X_j .

4.2. Exprimer la variable aléatoire X à l'aide des variables $(X_j)_{j \in \llbracket 1, r \rrbracket}$.

4.3. Démontrer alors que l'espérance de la variable aléatoire X est : $\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^r (1 - x_j)^n$.

Ces trois questions sont, lorsqu'elles sont abordées, correctement traitées.

- $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^r \mathbb{P}(X_j = 0)\right) = \sum_{j=1}^r \mathbb{E}((1 - x_j)^n)$ par linéarité de l'espérance.

5. La suite de l'exercice consiste à rechercher les valeurs des réels x_j pour lesquelles l'espérance $\mathbb{E}(X)$ est minimale.

Cela revient à dire que l'on cherche un minimum pour la fonction $f : (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r \mapsto \sum_{j=1}^r (1 - x_j)^n$ sous la contrainte :

$$\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, x_k > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^r x_j = 1.$$

On pose $U = \left\{ (x_1, \dots, x_{r-1}) \in \mathbb{R}^{r-1}, \forall k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket, x_k > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{r-1} x_j < 1 \right\}$.

5.1. Représenter graphiquement U dans le plan, c'est-à-dire dans le cas où $r = 3$.

Dessins très fantaisistes, tels un quart de cercle, un nuage de points, un trapèze...

5.2. Justifier que U est un ouvert borné de $\mathbb{R}^{r-1}$.

Si la plupart des candidats arrivent à prouver que U est borné, les justifications pour montrer que U est ouvert sont parfois très originales.

5.3. Déterminer une fonction h , définie sur U , des $r - 1$ variables $(x_j)_{j \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket}$, telle que :

$$h(x_1, \dots, x_{r-1}) = \mathbb{E}(X).$$

Curieusement, beaucoup d'étudiants ont du mal à trouver cette fonction. La prise en compte de la contrainte semble totalement leur échapper.

Pour beaucoup, $h(m) = \sum_{j=1}^r (1 - x_j)^r$!

5.4. Prouver que h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U .

Que de justifications laborieuses et oiseuses pour ce résultat pourtant très simple : le côté polynomial de h est trop peu souvent évoqué.

5.5. Recherche des points critiques de h

5.5.1. Soient $j \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$ et $m = (x_1, \dots, x_{r-1}) \in U$.

Déterminer la j -ième coordonnée du vecteur gradient de la fonction h en m .

Cette question et la suivante sont en général correctement traitées pour ceux qui ont la bonne fonction h .

5.5.2. Déterminer l'unique point critique b de h sur U .

5.6. Conclusion

5.6.1. Écrire la matrice Hessienne de h en b .

On obtient parfois la matrice nulle !

5.6.2. Démontrer alors que :

$$\mathbb{E}(X) \text{ admet un minimum local pour } x_1 = \dots = x_r = \frac{1}{r}.$$

On pourra utiliser une question préliminaire.

Question bien rédigée pour ceux qui l'ont abordée.

5.6.3. En utilisant la convexité de la fonction φ définie dans la question préliminaire, démontrer que :

$$\mathbb{E}(X) \text{ est minimale si, et seulement si, } x_1 = \dots = x_r = \frac{1}{r}.$$

Question rarement traitée.

EXERCICE 2

Question de cours

1. Rappeler, sans démonstration, les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge.

Lorsqu'il y a convergence, on note $\zeta(x)$ sa somme.

Surprenant de voir à plusieurs reprise que la fonction ζ est définie sur $[2, +\infty[$, voire sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$!

2. Rappeler, sans démonstration, la somme et l'intervalle de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} t^n$.

Intervalle de convergence incorrect ($[0, 1[$, $]-1, 1]$, ...) et somme fausse $\left(\frac{1}{1+t}, \dots\right)$, on voit toutes les bêtises possibles sur cette question élémentaire.

* * * * *

On rappelle que si f est une fonction infiniment dérivable sur une partie I de $\mathbb{R}$, alors, pour tout entier naturel p , $f^{(p)}$ désigne la dérivée d'ordre p de la fonction f avec la convention $f^{(0)} = f$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on note, lorsque cela existe :

$$E_1(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right) \text{ et, pour } k \geq 2, E_k(x) = \frac{1}{x^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^k}$$

3. Justifier l'existence de $E_1(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

La convergence absolue n'est presque jamais utilisée : le signe de $\frac{1}{x^2 - n^2}$ est en général aléatoire.

- si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, comme x , $x - n$ et $x + n$ sont non nuls, E_1 existe,

- $\frac{2x}{x^2 - n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-2x}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} !$

4. Soient $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

4.1. Étudier la nature des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(x - n)^k}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(x + n)^k}$.

Ici encore, oubli d'utiliser la convergence absolue.

- $\frac{1}{(x - n)^k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^k}{n^k}$ et le théorème sur les séries alternées permet de conclure.

4.2. En déduire l'existence de $E_k(x)$ pour tout $k \geq 2$.

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

5.1. Démontrer que la fonction E_k est 1-périodique.

- Les fonctions $E_1(x)$ et $E_k(x)$ sont des fonctions 1-périodiques puisqu'ils ne contiennent pas des fonctions 2π -périodiques, comme des fonctions trigonométriques.

5.2. Étudier la parité de la fonction E_k .

En général, ces deux questions sont bien traitées.

6. Une relation de récurrence

6.1. Prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction E_k est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, E'_k(x) = -k E_{k+1}(x).$$

Le théorème de dérivation des séries de fonctions est inconnu pour un candidat sur 2 environ !

- La fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x - n)^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x + n)^k}$ est dérivable puisque fonction polynôme et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^k}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, et donc E_k est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

6.2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction E_k est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et que :

$$E_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} E_1^{(k-1)}.$$

La récurrence est souvent mal rédigée.

7. Montrer que pour tout x de $] -1, 1[$ et pour tout entier naturel non nul n , la série $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{n^{k+1}}$ converge et calculer sa somme.

Le calcul est souvent effectué sans vérifier que $\left| \frac{x}{n} \right| < 1$.

8. Établir que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{2s}} x^{2s-1}.$$

Le théorème est vaguement invoqué sous la forme « Fubini positif » ou « Fubini module » sans qu'aucune de ses hypothèses ne soit, vérifiée, ni même citée, comme le demandait l'énoncé.

9. Montrer que pour tout x non nul de $]-1, 1[$, on a :

$$E_1(x) = \frac{1}{x} - 2 \sum_{s=1}^{+\infty} \zeta(2s) x^{2s-1}.$$

Le théorème utilisé sera cité avec précision en vérifiant ses hypothèses avec soin.

Peu de réussite sur ces deux dernières questions.

10. En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-1, 1[, x \neq 0$,

$$E_k(x) = \frac{1}{x^k} + 2(-1)^k \sum_{s=1}^{+\infty} \binom{2s-1}{k-1} \zeta(2s) x^{2s-k},$$

avec la convention $\binom{m}{p} = 0$ si $p > m$.

EXERCICE 3

Dans cet exercice, le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

À tout n -uplet $(a_1, \dots, a_n)$ de $\mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^{n-1}$, c'est-à-dire que $a_1 \neq 0$, on associe la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

1. Dans cette question $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

1.1. Justifier que M est diagonalisable.

Comme d'habitude un grand nombre de copies oublient de souligner le caractère « réel » des coefficients.

1.2. Déterminer le rang de la matrice M .

$\text{rg}(M) = 2$ n'est pas prouvé par un candidat sur deux. **On se demande si, pour un grand nombre de candidats, la notion de rang est connue, même après deux années de classes préparatoires !**

- Si $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ n'est pas combinaison linéaire entre eux, alors $\text{rg}(M) = n$. Sinon, si on note k le nombre de combinaisons linéaires et le nombre de $a_1, \dots, a_n$ égale à 0, alors $\text{rg}(M) = n - k$.

1.3. Justifier que 0 est valeur propre et donner son ordre de multiplicité.

Les étudiants ont beaucoup de mal à voir le lien entre cette question et la précédente. D'autre part, **la plupart ne connaissent pas la différence entre ordre de multiplicité de la valeur propre 0 et dimension de son sous-espace vectoriel propre associé.**

On voit apparaître une multiplicité algébrique voire une multiplicité géométrique !

- $\text{rg}(M) = n$ et donc, 0 est valeur propre de M , de multiplicité $n - 2$,
- par le théorème du rang, $\dim(M) = \dim(\text{Ker}(M)) + \text{rg}(M)$. Or, $\dim(M) = n^2$ et $\text{rg}(M) = 2$, d'où $\dim(\text{Ker}(M)) = n^2 - 2$. Mais comme $\text{rg}(M) \neq \dim(M)$, alors nécessairement, 0 est valeur propre de M de multiplicité $n^2 - 2$,
- $\text{Ker}(M) = 2$ et donc, $\text{Ker}(M) \neq \emptyset$ et donc, 0 est valeur propre de multiplicité $n - 2$.

1.4. Démontrer alors que la matrice M possède deux valeurs propres non nulles (éventuellement égales) que l'on notera λ_1 et λ_2 .

Réponse souvent très mal justifiée : beaucoup de verbiage.

1.5. Déterminer une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 0.

Beaucoup de candidats n'arrivent pas à mener à terme ces calculs plutôt simples.

1.6. Soit λ un réel non nul.

En résolvant le système $MX = \lambda X$ où X est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, montrer que λ_1 et λ_2 sont solutions de l'équation :

$$\lambda^2 - \lambda a_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0.$$

Question bien traitée pour ceux qui s'y sont essayé.

1.7. Déterminer une base des sous-espaces propres de M associés à λ_1 et λ_2 .

Encore une fois, de la réussite pour les rares candidats qui l'ont traitée de même que pour la question suivante.

1.8. Expliciter une matrice inversible P telle que $P^{-1}MP$ est diagonale.

On précisera la matrice diagonale obtenue.

2. Étude du cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

2.1. Montrer que :

$$M \text{ n'est pas diagonalisable si, et seulement si, } \begin{cases} \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0 \\ \text{ou} \\ a_n^2 + 4 \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0 \end{cases}$$

Question abordée par très peu de copies.

2.2. Donner un exemple de matrice M non diagonalisable dans le cas où $n = 3$.

Beaucoup d'étudiants donnent un exemple juste.

Luc Valette.